III－128　境界要素法による粘弾性解析手法に関する一考察

佐藤工業（株）中央技術研究所　正会員　○金子典由，篠川俊夫，吉田望
中央大学理工学部土木工学科　正会員　川原睦人

1．まえがき　境界要素法による粘弾性解析は Laplace変換による手法[1]がよく用いられているが、掘削解析のように形状の変化や荷重条件が変化する場合には計算が繁雑となる。一方、有限要素法による粘弾性解析では逐次時間積分による手法がよく用いられている。この手法は境界条件が変化しても計算が簡単である。有限要素法と境界要素法の結合解法により地盤掘削解析を行うためには、粘弾性解析手法を整合しなければならないが、上記の理由で、逐次時間積分手法の方が有利である。そのため、逐次時間積分による境界要素法の粘弾性解析手法[2]について検討する必要がある。本編では、その第一段階としてトラス部材を対象とした[3]一次元粘弾性解析手法について報告する。

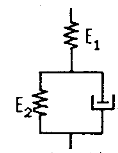
2．解析手法　図－1に示すレオロジーモデルを対象とした定式化を行う。積分方程式を (1)に示す。

$$u(\xi,t)=\left[u^*(x,\xi,t)P(x,0)+\int_0^t u^*(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]_0^L-\left[P^*(x,\xi,t)u(x,0)+\int_0^t P^*(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]_0^L \quad \text{—— (1)}$$

基本解を次式に示す。ここで、x：観測点，ξ：ソース点である。

$$u^*(x,\xi,t)=-\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_1E_2}\{(E_1+E_2)-E_2\exp(\frac{-E_2}{\eta_2}t)\} \quad \text{—— (2)}$$

$$P^*(x,\xi,t)=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x,\xi) \quad \text{（}P^*\text{ は時間に依存しない）} \quad \text{—— (3)}$$



図－1　レオロジーモデル
（ Voigt型三要素モデル）

時間方向に後方差分をとる（時間増分は一定とする；$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}\equiv\Delta t$）。

$$\Delta u(\xi,t_n)=u(\xi,t_n)-u(\xi,t_{n-1})$$
$$=[\{u^*(x,\xi,t_n)-u^*(x,\xi,t_{n-1})\}P(x,0)+\int_0^{t_n}u^*(x,\xi,t_n-\tau)\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau-\int_0^{t_{n-1}}u^*(x,\xi,t_{n-1}-\tau)\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau]_0^L$$
$$-[\{P^*(x,\xi,t_n)-P^*(x,\xi,t_{n-1})\}u(x,0)+\int_0^{t_n}P^*(x,\xi,t_n-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau-\int_0^{t_{n-1}}P^*(x,\xi,t_{n-1}-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau]_0^L \quad \text{—— (4)}$$

次に、 (5)に示す性質を利用し、かつ時間区間の積分に台形公式を用いると (4)は (6)のように展開できる。

$$u^*(x,\xi,t_{n-1}-\tau)=u^*(x,\xi,t_n-\tau)-\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_2}\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}(t_n-\tau))\{1-\exp(\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\} \quad \text{—— (5)}$$

$$\Delta u(\xi,t_n)=[\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_2}\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}t_n)\{1-\exp(\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\}P(x,0)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}u^*(x,\xi,t_n-\tau)\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau$$
$$+\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_2}\{1-\exp(\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\sum_{r=1}^{n-1}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}(t_n-\tau))\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau]_0^L-[-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x,\xi)\Delta u(x,t_n)]_0^L \quad \text{—— (6)}$$

さらに、時間区間Δt内で u(x,t),P(x,t)は線形と仮定すると、以下の結果を得る。

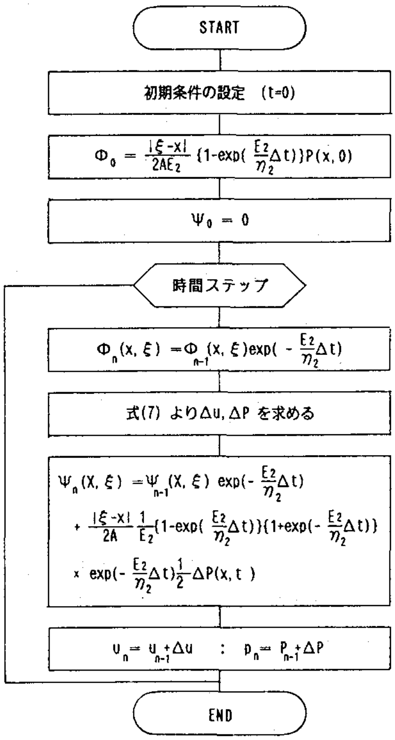
$$\Delta u(\xi,t_n)+[-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x,\xi)\Delta u(x,t_n)]_0^L=[\frac{1}{2}\{u^*(x,\xi,0)+u^*(x,\xi,\Delta t)\}\Delta P(x,t_n)+\Phi_n(x,\xi)+\Psi_{n-1}(X,\xi)]_0^L \quad \text{—— (7)}$$

ただし、

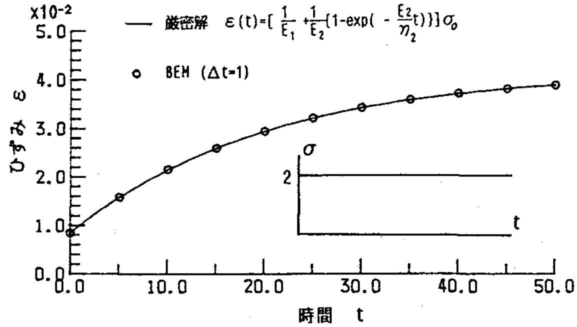
$$\Phi_n(x,\xi)=\Phi_{n-1}(x,\xi)\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t),\qquad \Phi_0(x,\xi)=\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_2}\{1-\exp(\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\}P(x,0)$$

$$\Psi_{n-1}(X,\xi)=\Psi_{n-2}(X,\xi)\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)+\frac{|\xi-x|}{2A}\frac{1}{E_2}\{1-\exp(\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\}\{1+\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\}\exp(-\frac{E_2}{\eta_2}\Delta t)\frac{1}{2}\Delta P(x,t_{n-1}),\quad \Psi_0(X,\xi)=0$$

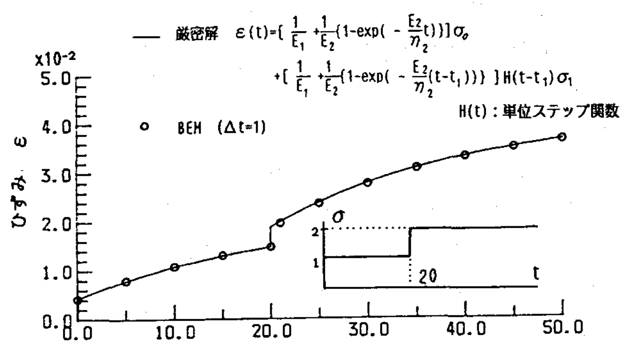
以上が、境界要素法による一次元粘弾性解析の定式化である。 (7)より、逐次時間積分による粘弾性解析を、前回の時間ステップの諸量のみを用いて行うことが可能であることが明らかになった（図－2参照）。



図－2　解析フロー図



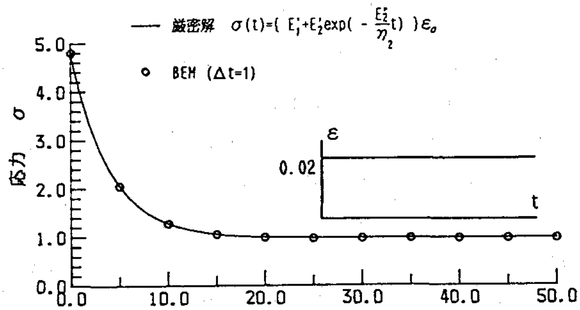
図－3　クリープ解析



図－4　クリープ解析　（二段階解析）

解析諸定数

E_1 = 240	$E_1' = \frac{E_1E_2}{E_1+E_2}$
E_2 = 60	$E_2' = \frac{E_1^2}{E_1+E_2}$
η_2 = 1200	$\eta_2' = \frac{E_1^2}{(E_1+E_2)^2}\eta_2$



図－5　応力緩和解析

3．解析結果　(7)の定式化による一次元粘弾性体の解析結果を図－3～5に示す。なお、応力緩和の厳密解については、モデルの等価性により Voigt型モデルの定数を Maxwell型モデルの定数に変換して求めた。解析結果は、ステップ入力に対する解析（図－4）も含めて、厳密解と良好な一致をみた。

4．あとがき　本報告では、逐次時間積分による一次元粘弾性解析手法を示した。いくつかの数値計算結果より、本報告の妥当性が検証された。今後は、この手法の二次元への拡張を試み、有限要素法・境界要素法の結合解法による地盤掘削解析に適用していく所存である。

<参考文献>

1) 田中正隆：機械の研究, Vol.35, No.9, pp.95-98, 1983.
2) Banerjee,P.K. and R.Butterfield : Boundary Element Methods in Engineering Science , McGRAW-HILL , 1981.
3) 戸川隼人, 下関正義：パソコンによる境界要素法入門, サイエンス社, 1983.