

III-125 流れ関数を用いた剛塑性有限要素法

京都大学工学員 学生員 〇田 中 照 彦

京都大学工学部 正 員 小 林 昭 一

京都大学工学部 正 員 田 村 武

1. 概説

土構造物の崩壊荷重とその崩壊機構の決定に際し、塑性論の上、下界定理を用いて金属の加工荷重の近似値を有限要素法で求めるという塑性加工の分野から発展した「剛塑性有限要素法」が、解析手法として研究されている。そこでは、塑性ひずみの体積成分が発生しないような降伏関数を採用するときに、その条件を近似的に満足する変位関数で内挿するのが普通である。本研究は、この非圧縮条件を厳密に満足させるように流れ関数 (Stream Function) を用いて剛塑性有限要素法を定式化し、簡単な数値計算例を示したものである。流れ関数を導入するために、HCT要素という特殊な要素を用いて、流れ関数の一階微分 (変位) の連続性を保たせるところに本手法の特徴がある。

2. 解析手法

(i) 上界定理

$$\begin{aligned} \bar{P} \{ \int T_i \dot{u}_i ds + \int X_i \dot{u}_i dV \} \\ = \int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \quad (1) \\ (D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}) \\ P^* \{ \int T_i \dot{u}_i ds + \int X_i \dot{u}_i dV \} \\ = \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2) \\ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (3) \\ P^* \leq \bar{P} \quad (4) \end{aligned}$$

表面力 T_i 物体力 X_i に対し、(1) の左辺の積分で表される仕事率が正になるような任意の速度場 $\dot{u}_i$ を考える。この $\dot{u}_i$ から計算されるひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_{ij}$ と、normality ruleを満足する応力 σ_{ij} ($\dot{\epsilon}_{ij}$ が降伏面上でその法線方向を向く) より定義されるエネルギー消散率が右辺の $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ である。(1) から、一つの速度場 $\dot{u}_i$ に対応して $\bar{P}$ が求められる。さて、破壊時の真の荷重強度を P^* 、応力を σ_{ij}^* とすると、(2) が仮想仕事の式として成立するが、(3) の最大塑性仕事の原理を考慮すれば明らかに (4) がいえる。つまり、(1) で計算された $\bar{P}$ は、破壊時の真の荷重強度 P^* を下まわることにはない。これより、(1) の $\bar{P}$ を最小にするような速度場 $\dot{u}_i$ を求めることが、すなわち真の崩壊機構と荷重強度を求めることになる。

(ii) 流れ関数の導入

エネルギー消散率 $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ が変位 (ひずみ) 速度場についての一次の斉次式であることから、外力仕事率を1とし、(5)、(6) のように書いてもよい。 $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ を決めるには、降伏条件式を与えなければならないが、ここでは von Mises の降伏関数 (7) を採用する。すると (8) となるのが容易にわかる。ただし、このとき体積ひずみ速度を零とする必要があるが、ここでは (9) なる関係のある流れ関数 ψ を用いて、これを満たすことにする。すると速度場は、節点における流れ関数の値により (10) のように表され、また体積ひずみ速度は完全に零となる。そして (6) のもとで (5) の $\bar{P}$ を最小にする条件は (11)、(12) のようになる。ここで、 B は B マトリックス、 N は形状関数、 T は外力ベクトルである。また μ は、制約条件 (12) にかかる Lagrange 乗数であるが、(11) をつりあい式とみれば、荷重強度であることがわかる。

$$\begin{aligned} \bar{P} = \int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min. \quad (5) \\ \text{sub. to } \int T_i \dot{u}_i ds + \int X_i \dot{u}_i dV = 1 \quad (6) \\ f = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_0^2) \quad (7) \\ (\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}) \\ D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_0 \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (8) \\ \dot{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dot{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9) \\ \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = N \psi^e \quad (10) \\ \int B^T \sigma dV = \mu \int N^T T ds \quad (11) \\ (\int N^T T ds)^T \psi^e = 1 \quad (12) \end{aligned}$$

(iii) HCT要素

HCT要素とは、K.H.Hsieh R.W.Clough および J.L.T ocher により考案されたもので、通常の要素では満たされない相隣り合う2要素間の境界線上での法線方向微分の連続性を保証することができる。 fig-1の重心Gを用いて三角形を三分割し、流れ関数 ψ を各小三角形内で3次多項式(13)で表す。そして、たとえば小三角形①で、A, B, Gの ψ 、 $\dot{u}$ 、 $\dot{v}$ とABの中点Dでの法線微分 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ を与えれば、係数 $a_1 \sim a_9$ は決定される。②、③においても同様である。さて、中点D, E, Fにおける ψ や重心Gにおける諸量は本来、用いない量である。そこでまず、各中点における法線微分は2端点のそれらの平均値とする。これにより、3辺AB、BC、CAでの法線方向微分は連続となる。一方、3つの小三角形の境界辺の中点での法線方向微分は等しいという3つの条件より重心での ψ 、 $\dot{u}$ と $\dot{v}$ を決めれば、それらの辺上において法線微分は連続となる。なぜなら各辺上において、これが2次関数であることによる。こうしてHCT要素は構成される。

具体的には、fig-2の基本三角形に対し、次のようになる。

$$\psi(\xi, \eta) = M \cdot (\psi_1, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \psi_2, \dot{u}_2, \dot{v}_2, \psi_3, \dot{u}_3, \dot{v}_3)^T$$

$$M = (1/3, 7/3, 1/3, 7/3, 1/3, 7/3, 1/3, 7/3, 1/3) B_n$$

ここで B_n マトリックスは小要素①、②、③で表-1の BII, BII, BIII となる。

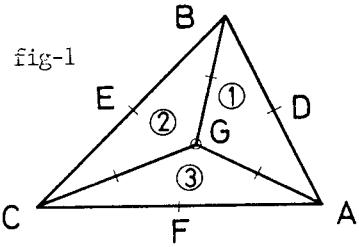
3. 数値計算例

(i) 浅い基礎の支持力(要素数80)

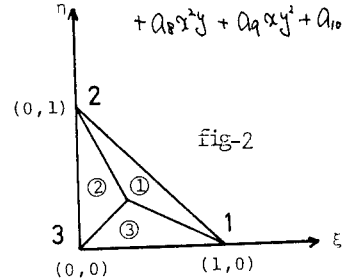
fig-3に示すような、速度場が得られた。すべり線理論から求まる正解に対して、誤差は+5.7%であった。

(ii) 斜面の支持力(要素数54)

fig-4に示すような、速度場が得られた。同様に誤差は、+6.3%であった。なお、fig-3, 4における曲線は流れ関数の等高線であり、すべり線に相当するものである。



$$\psi(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^3 + a_8 \xi^2 \eta + a_9 \xi \eta^2 + a_{10} \eta^3 \quad (13)$$



BI-MATRIX									
1.00	-0.00	0.50	1.00	-0.50	0.00	-1.00	-0.50	0.50	
-4.50	0.25	-2.25	-4.50	2.25	0.25	9.00	2.00	-3.50	
-4.50	-0.25	-2.25	-4.50	2.25	-0.25	9.00	3.50	-2.00	
9.00	-0.50	4.00	6.00	-3.00	-0.50	-15.00	-2.50	5.50	
15.00	0.50	7.50	15.00	-7.50	-0.50	-30.00	-8.00	8.00	
6.00	0.50	3.00	9.00	-4.00	0.50	-15.00	-5.50	2.50	
-4.50	0.25	-2.25	-2.50	1.25	0.25	7.00	1.00	-2.50	
-10.50	0.75	-5.25	-10.50	5.25	0.75	21.00	4.50	-6.00	
-10.50	-0.75	-5.25	-10.50	5.25	-0.75	21.00	6.00	-4.50	
-2.50	-0.25	-1.25	-4.50	2.25	-0.25	7.00	2.50	-1.00	
BII-MATRIX									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.00	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	
3.00	0.50	1.00	-0.00	0.00	-0.50	-3.00	-0.50	1.50	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.00	0.0	0.0	1.00	
0.0	0.0	0.0	3.00	-1.00	0.0	-3.00	-2.00	0.0	
-2.50	-0.75	-1.25	-0.50	0.25	-0.75	3.00	1.00	-0.50	
1.50	0.75	0.75	1.50	-0.75	0.75	-3.00	-1.50	-0.00	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
0.0	0.0	0.0	-2.00	1.00	0.0	2.00	1.00	0.0	
BIII-MATRIX									
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.00	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	
3.00	-0.00	1.00	-0.00	0.00	0.00	-3.00	0.00	2.00	
0.0	1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.00	0.0	
-0.00	-0.50	-0.00	3.00	-1.00	-0.50	-3.00	-1.50	0.50	
-2.00	0.00	-1.00	0.00	-0.00	-0.00	2.00	0.00	-1.00	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
1.50	-0.75	0.75	1.50	-0.75	-0.75	-3.00	0.00	1.50	
-0.50	0.75	-0.25	-2.50	1.25	0.75	3.00	0.50	-1.00	

表-1

