III-124　内部摩擦角を考慮した剛塑性有限要素法

京都大学大学院　学生員　○角　　哲　也
京都大学工学部　正　員　　小　林　昭　一
京都大学工学部　正　員　　田　村　　武

1．概説

塑性論の上界定理を連続体に拡張させ、有限要素法の手法を適用して崩壊荷重の近似値を求める数値計算法が「剛塑性有限要素法」である。すでに金属の塑性加工の分野では加工荷重を求める方法として注目されている。解析対象として地盤材料を選び、地盤構造の極限解析への適用を試みた解析例（文献1,2）があるが、本研究は、従来まで考慮されなかった内部摩擦角を導入することによって、現実の土質材料により即した解析を可能とすることを主眼とした。降伏条件のσ_0が等方圧σ_mに依存するということで内部摩擦角を表現する一方、等体積条件を満足させるために、塑性ポテンシャルと降伏関数が一致しない Non-Associated Flow Rule を設定した。

2．解析方法

i）基礎理論

表面力T_i，物体力X_i，速度場$\dot{u}_i$としたとき、（2）を満たす任意の運動学的許容な速度場$\dot{u}_i$に対し、（3）で定義される$\bar{\rho}$を考える。ここで$D(\dot{\varepsilon}_{ij})$は塑性ひずみ速度$\dot{\varepsilon}_{ij}$が与えられたとき、それと normality rule を満たす応力σ_{ij}との積で定義される$\dot{\varepsilon}_{ij}$の一価関数であり、消散エネルギー率と呼ばれる。破壊時の真の荷重強度をρ^*，応力をσ_{ij}^*とすると仮想仕事式から（4）が成立する。（3），（4）および（5）の最大塑性仕事の原理より（6）が成り立ち、任意な$\dot{\varepsilon}_{ij}$に対応する荷重強度$\bar{\rho}$は真の荷重強度ρ^*を下回ることがない。これが上界定理である。これにより$D(\dot{\varepsilon}_{ij})$の$\dot{\varepsilon}_{ij}$に対する一価性、および（1）の変位―ひずみ関係を考慮すると、（3）における$\bar{\rho}$を最小にする速度場$\dot{u}_i$を求めることが真の崩壊機構と荷重強度を決定することになる。

ii）有限要素法による定式化

〔A〕のような問題を設定する。（9）は体積ひずみを生じない降伏関数を用いるために必要な条件、（8）は外部仕事を単位の大きさにする条件で、これらにより（7）の値がただちに$\bar{\rho}$の値となり、これを最小にすればよいことになる。また、偏差応力をS_{ij}とすると、ここで採用した塑性ポテンシャルg、および降伏関数fはそれぞれ（10），（11）と表現される。従って、normality rule により（12）が成立し、偏差応力は（13）で求められる。ここで、$\bar{e}$ は（14）で計算される相当塑性ひずみ速度である。ところで、Non-Associated Flow Rule による破壊円と破壊線の関係は図―1のようになり、平面ひずみ状態であることを考慮するとσ_0は、σ_mに依存する形で（15）のように表される。そこで問題〔A〕を有限次元に置換すると、問題〔B〕のようになる。ここでBは、Bマトリックス，Qは、工学ひずみ

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1)$$

$$\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i dS > 0 \quad (2)$$

$$\bar{\rho}\left[\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i dS\right] = \int D(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV = \int \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (3)$$

$$\rho^*\left[\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i dS\right] = \int \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (4)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{\varepsilon}_{ij} \geqq 0 \quad (5)$$

$$\rho^* \leqq \bar{\rho} \quad (6)$$

$$[\mathrm{A}]\quad \boxed{\begin{array}{ll} D(\dot{\varepsilon}_{ij})dV \rightarrow min & (7) \\ \text{sub. to}\left\{\begin{array}{l} \int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i dS = 1 \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l}(8)\\(9)\end{array} \end{array}}$$

$$g = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{2}(S_{ij} S_{ij} - \sigma_0^2) \quad (11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda S_{ij} \quad (12)$$

$$S_{ij} = \frac{\sigma_0}{\bar{e}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (13)$$

$$\bar{e} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (14)$$

$$\boxed{\sigma_0 = \sqrt{2}\tan\phi\,\sigma_m + \sqrt{2}C \quad (15)}$$

$$[\mathrm{B}]\quad \boxed{\begin{array}{ll} \left(\sigma_0 \int \frac{B^T Q B}{\bar{e}} dV\right)\dot{u} + L^T \lambda - \mu F = 0 & (16) \\ F^T \dot{u} = 1 & (17) \\ L\dot{u} = 0 & (18) \end{array}}$$

からテンソルひずみへの変換行列，Lは変位から体積への変換行列，$\mathbb{F}$は外力ベクトルであり、（16）を釣り合い式とみれば、λ，μはそれぞれ不定圧，荷重強度とみなすことができる。このσ_0が、各要素ごとに異なる値を持つことになる。これで解くべき連立方程式が得られたが、（16）において第1項は$\dot{u}$に関して非線形となっている。そこで微小量$\Delta\dot{u}$を導入し$\Delta\dot{u}$についての線形方程式とし、Newton-Raphson法による逐次計算を行なって収束値としての$\dot{u}$を求める。

3. 計算結果

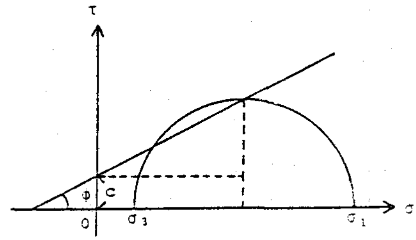
i）応力円と破壊円

解析により得られた主応力によりモールの応力円を描くと、粘着力と内部摩擦角に対応した破壊円を描くことができる（図―2）。ここで破壊線が応力円の頂部を連ねた線で表されるのは、各要素ごとに、その等方圧に対応した固有なσ_0で破壊が生じるからである。Associated Flow Ruleでは、各応力円が破壊線に接するのに対して、この場合は破壊線を切るようになるので、強度がやや大きめに計算されることになる。

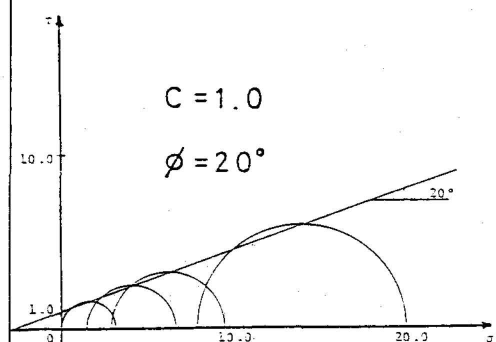
ii）半無限体への平らな剛体ポンチの押し込み問題

比較する解析結果として内部摩擦角を考慮した剛体ポンチ問題をとりあげた。（文献3．）　ただしこの結果は、Associated Flow Rule　に基づいているので本手法に対応するように（19）で与えられる係数を乗じて比較した。(Table. 1)　ここで、体積ひずみを生じさせないようなNon-Associated Flow Ruleを設定しているので、ϕの大きな値に対する解析はできない。図―3，図―4は、C＝1.0，ϕ＝20°として計算した際の、主応力方向とその大きさ、および変位速度を図示したものである。

$$\frac{1-\sin\phi}{\cos\phi-\sin\phi} \qquad (19)$$



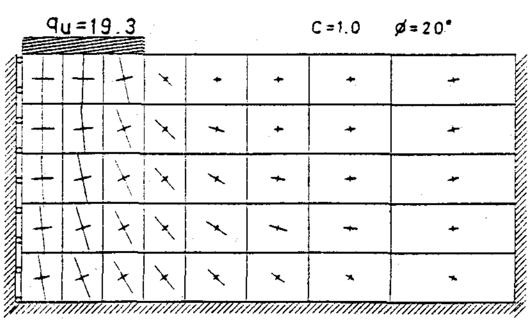
図―1



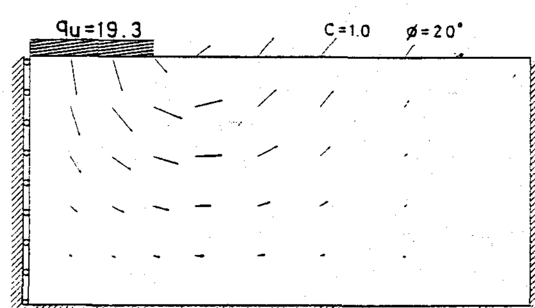
図―2

φ	CHEN	係　数	補正値	μ	比
0°	5.140	1.00	5.140	5.36	1.04
10°	8.347	1.02	8.514	9.00	1.06
20°	14.84	1.10	16.32	19.3	1.18
25°	20.73	1.19	24.67	33.4	1.35

Table. 1



図―3



図―4

〔参考文献〕

1．清水　章裕；“内部摩擦角を考慮した剛塑性有限要素法に関する研究”　京都大学　卒業論文　1983

2．田村　　武；“剛塑性有限要素法による地盤の極限解析”　S.57年度科学研究補助金研究成果報告書

3．W. F. CHEN；“LIMIT ANALYSIS AND SOIL PLASTICITY”　ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING Co.,1957