III-123　土構造物の安定解析に対する有限変形理論の適用

福井大学大学院　学生員　西岡　正則
福井大学工学部　正員　福井　卓雄

本報文では、地盤あるいは土構造物の不安定挙動を適確に把握し、より確実に不安定現象をシミュレートするために有限変形連続体理論を用いて解析を行う意義について考察すると伴に有限要素法を用いた大変形解析の方法について概説する。

土構造物の安定問題の例として、斜面の安定問題を考えよう。斜面の安定を評価し現象をシミュレートする方法として次のものが挙げられる。

(1) 剛体的つり合いを評価するもの
- 摩擦円法 }円形すべり面
- 分割法 ― 非円形すべり面

(2) 連続体として取扱うもの
- 剛塑性
- 弾塑性
- 粘塑性
- 非線形弾性

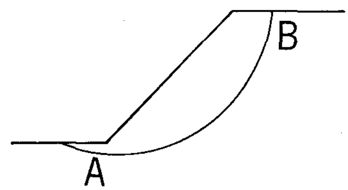

図1

(1)の摩擦円法などの安定評価法は、基本的には、仮定されたすべり面上の土の重量とすべり面に働らく摩擦力との剛体的なつり合いを評価する方法であって、土の変形は考慮されていない。土の運動の自由度は仮定されたすべり面に沿う方向に限定されている。また、この方法の特徴は、すべり面上の土塊が剛体的に同時に動くと仮定していることであって、評価される安定条件は、静止した土塊が瞬時に動き出す、すべり開始の条件となっている。

(2)の連続体的取り扱いは、現在のところ、微少変形理論に基づいた連続体理論をもとにしており、解法は有限要素法を用いることが多いようである。これらの方法の特徴は、不安定条件の根拠を土の非線形的な構成関係に帰着させようとしていることであり、種々の構成関係が提案され、また用いられている。これらの方法では、土の変形により、地盤中の応力は、ある部分に集中し、その部分の土を劣化させ、さらに変形を進めて応力を再分配し、土の劣化域を拡大させていく。結果的に、土中にある劣化域が拡がり、応力がある程度分配されたところで安定状態に落ち着く。劣化域の拡がり方は土の構成関係に依存するものである。しかしながら、微小変形の仮定のもとでは、土中の応力のつり合いは、あくまでも、変形前の最初の形状の上でのつり合いであり、この意味で、この方法もまた、すべり開始時での土中の状態を評価しているにすぎない。

さて、斜面の不安定現象を思考実験的に構成してみよう。簡単のために、現実の現象とは合わないかもしれないが、土の自重が序々に増加していくモデルを考えよう。まず、すべり開始前から斜面先端部（図1．A）では劣化域が拡がり始める。これによって、Aの上部の土塊はより動き易くなり、斜面外部へと大きくせり出す。この時点では、すべり面が形成されている訳ではないが、斜面の土塊の重心は全体として斜面の外側へ移動し、A部の劣化域を拡大させると同時にB部に引張応力を生じさせることになる。土の自重の増加とともに、この傾向は強調され、B部に割れが生じると、それがすべり面形成の引き金となって、斜面がすべり出すと想像される。

上の思考実験が妥当なものであると仮定すれば、斜面の不安定現象で主役を演じるのは、斜面の土塊の重心移動であり、それを促進する土の構成関係の非線形性である。すなわち、斜面のすべり現象においてもまた柱や薄

料構造の座屈現象と同様に幾何学的非線形性の考慮が必須であると考えられる。 図2は、有限変形連続体モデルの重心移動に対する効果を表わしたものである。 材料は弾性体とし、1×2の柱の上端を長さの1%だけ傾けたものの自重を序々に増加させたときの上端Aと下部Bとの水平変位の変化を表わしている。 このような単純な弾性体においても有限変形を考慮した解析結果が微少変形解よりも10%程度も大きな変形をすることがわかる。 地盤・土構造物などの材料が柔かく、かつ massive な構造物の不安定現象の追跡に有限変形解析が必要であると考えられる根拠でもある。

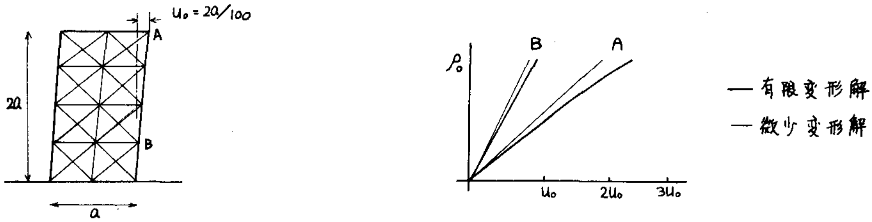


図2

有限変形増分理論の構成とその有限要素法による解析についてまとめておく。 ここに挙げるのは北川ら(1972)による方法を整理したものである。 図3に示すように、基準状態，変形後，増分変形後の3つの状態を考える。 埋込み座標系で変形を追跡することとし、諸量の成分を図3に記す。 増分量は増分変形後の成分からその前の変形後の状態の成分を引いた値、たとえば，$\bar{u}_i = u_i + \Delta u_i$ として表わされる。 ここで，左辺の量は基準底 $\bar{G}^i$ に対する成分を、右辺の量は基底 $G^i$ に対する成分を表わしている。 基礎式は次の様である。

(1) 幾何学的関係

基底ベクトル： $\bar{G}_i = (\delta_i^m + \Delta u^m|_i)\, G_m$

ひずみ増分　： $2\Delta\gamma_{ij} = \bar{G}_{ij} - G_{ij} = \Delta u_i|_j + \Delta u_j|_i$　ただし，$G_{ij} = G_i \cdot G_j$

(2) 運動方程式

増分つりあい式： $\Delta\tau^{ij}|_j + (\tau^{ij}\Delta u^m|_m)|_i + \tau^{im}(\Delta u^j|_m)|_i + \Delta\rho\Delta F^j = 0$

(3) 弾塑性構成関係　Jaumann の応力増分　${}_J\Delta\tau^{ij} = \Delta\tau^{ij} + (G^{lj}\tau^{ki} + G^{li}\tau^{kj})\Delta\gamma_{kl}$

線形関係 ${}_J\Delta\tau^{ij} = D^{ijkl}\Delta\gamma_{kl}$ を仮定すると

$$D^{ijkl} = B^{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial\tau^{mn}}\frac{\partial f}{\partial\tau^{pq}} B^{mnij} B^{pqkl}}{\left(\frac{dF}{dW^p}\tau'^{rs} + \frac{\partial f}{\partial\tau^{uu}} - \frac{\partial f}{\partial\gamma_{rs}^{(p)}}\right)\frac{\partial f}{\partial\tau^{rs}}}$$

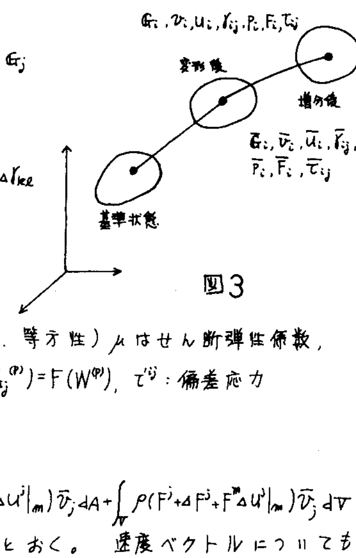


図3

ここに、 $B^{ijkl} = \mu\left(G^{ik}G^{jl} + G^{il}G^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}G^{ij}G^{kl}\right)$，(Hookの法則．等方性) $\mu$ はせん断弾性係数，

$\nu$ : Poisson比，$f$ : 降伏関数，$W^{(p)}$: 塑性仕事，$\gamma_{ij}^{(p)}$: 塑性ひずみ，$f(\tau'^{ij}, \gamma_{ij}^{(p)}) = F(W^{(p)})$，$\tau'^{ij}$ : 偏差応力

(4) エネルギ平衡式　表面力，$P^i$，$\bar{P}^i$，速度ベクトル $v^i$，$\bar{v}^i$ とすると

増分変形前　$\int_V \tau^{ij} v_j|_i\, dV = \int_A P^j v_j\, dA + \int_V \rho F^j v_j\, dV$

増分変形後　$\int_V (\tau^{ij} + \Delta\tau^{ij} + \tau^{ij}\Delta u^m|_m + \tau^{im}\Delta u^j|_m)\,\bar{v}_j|_i\, dV = \int_A (P^j + \Delta P^j + P^m\Delta u^j|_m)\,\bar{v}_j\, dA + \int_V \rho(F^j + \Delta F^j + F^m\Delta u^j|_m)\,\bar{v}_j\, dV$

(5) 有限要素法　要素内の変位増分を変位関数を用いて　$\Delta u_i = \phi_N \Delta u_{iN}$ とおく。 速度ベクトルについても同様に表現できるとすると、上の2つのエネルギ平衡式の差として

$$\int_V (\Delta\tau^{ik} + \tau^{ik}\Delta u^m|_m + \tau^{im}\Delta u^k|_m)_N (\phi_{N,i}\delta_k^j - \phi_N \Gamma_{ik}^j)\, dV = \int_A (\Delta P^j + P^m \Delta u^j|_m)\phi_N\, dA + \int_V \rho(\Delta F^j + F^m \Delta u^j|_m)\phi_N\, dV$$

を得る。 これに構成関係を用いれば、変位増分に対する要素剛性式が得られる。 各式分を全体座標系に変換して逐次的に解けば、各変形段階での諸量を得ることができる。


(参考文献) 北川、瀬口、冨田、機械学会論文集(第1部)，38，479-489 (1972)