III－89　長期残留沈下の予測に関する基礎的一考察

名古屋大学　工学部　学　○上田一晴
不動建設　正　野津光夫
名古屋大学　工学部　正　浅岡　顕

1．はじめに

粘性土地盤の長期残留沈下を予測するためには、弾性圧密理論では不十分であって、粘土のクリープ的な変形特性を考慮に入れる必要があると指摘されてきている。ところで、圧密モデルもクリープモデルもともに、変形の時間遅れ挙動を説明するためのモデルとして見ることができる。そうすると、実際の粘土地盤の時間遅れ変形挙動を観測したとき、その挙動が圧密であってクリープでないとか、クリープであって圧密でないとか、あるいは圧密とクリープのまじったものであるとかの区別は、自然とつくものなのか、かなり考えてからつくものなのか、どうしたら区別がつけられるのか（すでに自明なのかもしれないが）考えてみようと思った。本稿は、手始めとして、最も簡単なVoigtモデルについて考察し、圧密とくらべることにした。

2．3次元線形粘弾性挙動

簡単のために、Voigt体が1つしかない1要素モデルについて調べてみることにする。均質等方性物体に応力が作用して変形する場合、主応力軸と主ひずみ軸は一致するとして、今、等方応力をσ_m，等方ひずみをε_mとすれば、1要素モデルの等方成分に関する構成方程式は①式で示され、また、偏差応力をS_{ij}，偏差ひずみをe_{ij}とすると、偏差成分に関する構成方程式も同様に②式で表わすことができる。

$$\sigma_m = \frac{1}{B'}\varepsilon_m + \frac{\tau_B'}{B'}\dot{\varepsilon}_m \qquad \text{———— ①}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{C'}e_{ij} + \frac{\tau_C'}{C'}\dot{e}_{ij} \qquad \text{———— ②}$$

ここに、　B'，C'　：等方成分、偏差成分に関するスプリングのコンプライアンス
τ_B'，τ_C'　：　〃　遅延時間

①，②式より次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{C'}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{B'}-\frac{1}{C'}\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{\tau_C'}{C'}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_B'}{B'}-\frac{\tau_C'}{C'}\right)\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{——— ③}$$

つぎに、この力学モデルの特性（パラメタ）を2つの場合に分け、つり合い式を有限要素法の概念を用いて、空間領域で離散化し、結果として境界条件をすでに含んだ形の変位に関する常微分方程式をもとに考察する。なおまた簡単のために平面ヒズミ条件でとり扱う。

（CASE1）　$B'=C'=A$，　$\tau_B'=\tau_C'=\tau$　のとき。

このときには③式は、

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1}{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\ &1&0\\ \text{sym.}&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} + \frac{\tau}{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\ &1&0\\ \text{sym.}&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \text{———— ④}$$

となり、これを$\boldsymbol{\sigma} = D_E\boldsymbol{\varepsilon} + D_\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$で表すことにすれば、変位ベクトル$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{\varepsilon}$の関係式より、$\boldsymbol{\sigma} = D_E B\boldsymbol{u} + D_\eta B\dot{\boldsymbol{u}}$が得られる。この式を外力$\boldsymbol{f}(t)$が負荷されたときのつり合い式$\int_V B^T\boldsymbol{\sigma}\,dV = \boldsymbol{f}(t)$に代入することによって、次式のように$\boldsymbol{u}(t)$の支配方程式が得られる。

$$M\boldsymbol{u} + N\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f} \qquad \text{———— ⑤}$$

ここに、　M：　$\left[\int_V B^T D_E B\,dV\right]$　$(2n-I_u)\times(2n-I_u)$　正定値対称行列
N：　$\left[\int_V B^T D_\eta B\,dV\right]$　$(2n-I_u)\times(2n-I_u)$　正定値対称行列（I_u：変位の拘束方向の数）

ここで、⑤式の一般解は、　$W=-N^{-1}M$とおくと、形式的には　$\boldsymbol{u}(t) = e^{W(t-t_0)}\boldsymbol{u}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{W(t-t')}N^{-1}\boldsymbol{f}(t')\,dt'$　となるが、（CASE1）のときには、

$$M = \frac{1}{\tau}N \quad \left(\because D_E = \frac{1}{\tau}D_\tau\right) \qquad ⑥$$

となっているのが大事で、⑤は連立方程式とは名ばかりの単独式の集まりで、$W=-\frac{1}{\tau}I$ の射影行列は I ひとつで、解は $u = e^{\lambda(t-t_0)}u_0 + \int_{t'}^{t} e^{\lambda(t-t')}dt' \cdot N^{-1}f$, $\lambda = -\frac{1}{\tau}<0$ となり、結局

$$Mu = f\left(1-e^{\lambda(t-t_0)}\right) \qquad ⑦$$

を得る。⑤の固有値は λ ひとつ（$2n-I_u$ 重根）で物性だけからきまり境界条件に依存しない。すなわち⑦式を見れば明らかなように、荷重が時間的に飽和するだけの単なる弾性問題にすぎない。

(CASE 2)　$B' \neq C'$　and/or　$\tau_B' \neq \tau_C'$ のとき。

このときには　式⑤

$$Mu + N\dot{u} = f \qquad ⑤'$$

において⑥式のような関係はもはや成立しないので、たとえば N がフルランクのとき、$W=-N^{-1}M$ の固有値問題となる。W は負定値対称行列で、実負の固有値は境界条件に依存してきまることになり、この限りで圧密と全く同じ現象に見える。もっとも、圧密のときには変位が水で拘束されていて N のランクは（2次元問題のとき）M のおよそ半分になっているが、これは、粘弾性のときの $\tau_B' \neq 0$, $\tau_C' = 0$ にあたる。いずれにせよ、⑤'の固有値が境界条件に依存してきまる負の実数であることには変りなく、したがって、このような現象を観測していたとすると、その観測値は圧密で説明してもよいし、クリープで説明してもよいし、両者をまぜて説明してもよいし、すなわち全然区別はつかないことになる。

3. 実際の変形挙動の観測について

⑤式をどこか特定の場所における特定方向（沈下とか側方変位）の変位 u_i の観測値にあてはめて考えるときには、$Gu=f$, $G=M+DN=g_{ij}$, $D=\frac{d}{dt}$ を u_i について解いて得られる高階常微分方程式が直接のあてはめのモデルになる。すなわち、

$$|G|\,u_i = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & f_1 & \cdots & g_{1,2n-I_u} \\ \vdots & & \vdots & & \\ g_{2n-I_u,1} & \cdots & f_{2n-I_u} & \cdots & g_{2n-I_u,2n-I_u} \end{vmatrix} \qquad ⑧$$

さて、このような方法で、実際の粘土地盤の時間遅れ変形挙動をスペクトル分解してみると、1〜2年程度の観測の場合、相異なる実負の固有値はたかだか3個までしか検出できないことが多い。この事実は2.で述べた結論と重ね合せて考えると、示唆的である。何故なら、我々はどんな境界条件のもとでも圧密もクリープも全部許容する受け皿⑧式を用意して現象を見ようとしているのだが、見える現象は観測間隔とその期間によって大きく制約を受けてしまうことが避けられないからである。何故そうなのかのより詳しい力学的及び統計学的考察はここではしばらくおくとして、ともかく筆者らの経験によれば、1〜2年の観測からでは何十年もかかって進行する時間遅れ変形のスペクトルは、見ようと思ってもなかなか見えないのである。このことは以下のようにして深刻である。

4. 長期残留沈下の予測上の問題点

このような長期沈下の予測がむつかしいのは、圧密計算に先立って構成式の中に粘土のクリープ特性を正しくとり入れておくことがむつかしいからだとする理由は、⑧式に関して述べた上の結論から見ると、その理由の全てではないことになる。⑧式は圧密でもクリープでも説明する一般的な現象の線形近似モデルであることはすでに見た。長期残留沈下の予測がむつかしいのは、仮に構成式の中にクリープ特性を表わす要素を入れておいたとしても、それにもとづく予測がどのように正確になったのかは、実際にその残留沈下が発現してからでないとわからない、事前にその予測がそれで正しいのだと客観的に確信するためのデータ解析の方法がどうしても考えつかない点にある。

5. おわりに

以上の議論は容易にn要素モデルにも敷衍できて、その場合でも上記の結論はかわることがない。土質力学に普通の経験式 $e \sim \log t$ 関係のような特殊な平均スペクトルにもとづく議論は、まだ何もしていない。