

徳島大学工学部 正 山上拓男  
同 上 正 植田康宏  
徳島大学大学院 学 小山正之

1. まえがき : FEMは土構造物内の応力分布を求める大変強力な武器である。しかしいくら高精度の応力分布が与えられても、それによつてただちに構造物全体としての安全率を知ることはできない。このFEMの最大の難点を解消すべく、筆者らは第1報<sup>1)</sup>で1つの試みを呈示した。すなわち、FE解析によつて与えられた応力場に潜在する全体安全率最小のすべり面形状と、そのときの安全率の値を探索するアルゴリズムを動的計画法(DP)に基づいて構築する方を述べ、第一段階として一様応力場に適用した結果を示した。本文はこの手法を本格的なFE場に導入する手順、ならびに具体的問題への適用例を示すものである。

2. DPに基づく着在すべり面決定 : DPの中心となる概念はBellmanによつて唱えられた最適性原理である。そして最適性原理を応用すれば関数(再帰)方程式と呼ばれる漸化式を書き下すことができ、さらに、この関数方程式を解けば目的関数を最適(最大・最小)とする状態が明らかになる。このDPの概念を着在すべり面探索に持ち込むには、まず全体安全率 $F_s$ を定義しなければならない。いま図-1に示すように、与えられた応力場の任意の2点A, Bを結ぶ任意の曲線 $\overline{AB}$ に沿つて、安全率 $F_s$ を次式で定義する :

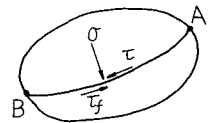
$$F_s = \int_A^B \tau_f ds / \int_A^B \tau ds \quad \cdots (1) \quad \text{ここに、} \tau_f \text{ と } \tau \text{ はそれぞれせん断抵抗とせん断応力である。このとき、新たな変数} G \text{ を持ち込んで}$$


図-1 安全率の定義

$$G = \int_A^B (\tau_f - F_s \tau) ds \quad \cdots (2) \quad \text{と定義すれば、式(1)の} F_s \text{ を最小にすることと、}$$

式(2)の $G$ を最小にすることが、たゞ同等であることが知られている。つまりA, B2点間を結ぶ曲線の選び方に依つて式(1)の $F_s$ の値が変化するが、求めるA, B2点間の潜在すべり面はいうまでもなく $F_s$ を最小とするものであり、そのとき式(2)の $G$ 自身も最小となっているのである。理論構成上、式(1)を直接最小化することはできないので、これに代つて式(2)の $G$ の最小化を図るのである。その際、数値解析の便宜上式(2)を離散形で表示する :

$$G = \sum_{i=1}^n (R_i - F_s T_i) \quad \cdots (3) \quad \text{さて、目下の問題にDPを適用するに当つては、図-2に示すように与えられた応力場を適当な数のstageに分}$$

割し、さらに各stage上でやはり適当な数のstateを設けなければならない。いま、図-3に示すように、任意の引き続く2つのstage  $i, i+1$ 上の任意state  $j$  および  $k$  に注目し、これら2点を結ぶ軌道 $\overline{jk}$ を可能なすべり面の一部とみなす。

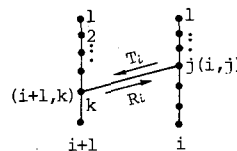


図-3 最適性原理の応用

このとき軌道 $\overline{jk}$ 間のせん断力 $T_i$ とせん断強さ $R_i$ をFEMによる応力分布から評価できたとすれば、この2点間の式(3)に寄与する $G$ の変化(return)  $DG_i(j, k)$ は

$$DG_i(j, k) = R_i - F_s T_i \quad \cdots (4) \quad \text{である。ここで、点Aから点}(i, j) \text{ に至る} G \text{ の最小値を} H_i(j) \text{ で表すと、この場合の関数再帰方程式は}$$

$$H_{i+1}(k) = \min_{j=1 \sim n} [H_i(j) + DG_i(j, k)]_{k=1 \sim n_{i+1}}, \quad H_1(1) = 0 \quad \cdots (5)$$

となる。式(3)ないし式(4)の $F_s$ の値は当初未知であるから、ある仮定値から出発して解が収束するまで反復計算を行わねばならない。また、以上の説明ではあくまでも着在すべり面の両端A, Bが既知であるかの如く扱ってきたが、なんらこの必要性はなく、両端が未知の場合は、図-4に示すように、最終stage上でのstateの数だけの可能な

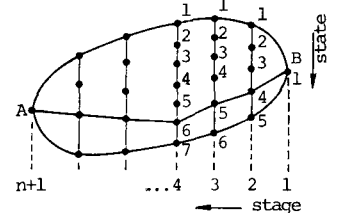


図-2 DPによる着在すべり面探索

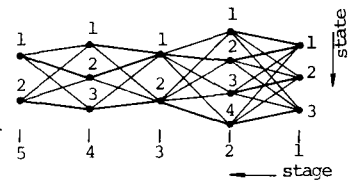


図-4 両端未知の場合

すべり面（太線）が得られるので、この内  $H_{n+1}(k)$  の小さい方を採用すればよい。

3. FE場への応用：FE法によって与えられた応力場へDPによるすべり面探索法を持ち込むためには有限要素網を stage, state としてうまく活用しなければならない。その際、有限要素の type としていかなるものを採用するかが電算プログラム作成と関連して重要である。ここではとりあえず、四辺形要素（三角形要素を組み合わせたもの、もしくは iso-parametric 要素）でかつ要素内応力分布が一定と仮定して求められた応力場を対象に開発したプログラムを紹介しよう。説明の便宜上図-5の極めて単純化された要素分割図を用いる。いま、図-5において、別途になされたFE解析で各要素内の応力分布が既知になっているとする。このとき与えられた領域の両サイド  $\overline{CD}$  と  $\overline{EF}$  間で式(1)の安全率が最小となる曲線、つまり潜在すべり面を探索するものとする。まずこのプログラムでは図にみられるように、要素網のなかの鉛直もしくは鉛直に近い線群を stage として利用する仕組みになっている。また、同じく図からうかがわれるように、各 stage 上で要素の辺上に自動的にその辺の長さを三等分する位置に2点が追加され、これらの点と有限要素の節点とで state を構成することになっている。したがってたとえば図-5の第1 stage 上では合計10個の state が存在することになる。こうして各 stage 上の state の数およびそれらの位置が定まれば、第2 stage と第1 stage の組み合わせから出発して式(5)に基づいてDPアルゴリズムが実行され、何度か繰返し計算ののち、たとえば図中の曲線（折線） $\overline{AB}$  の如き潜在すべり面が決定されるのである。

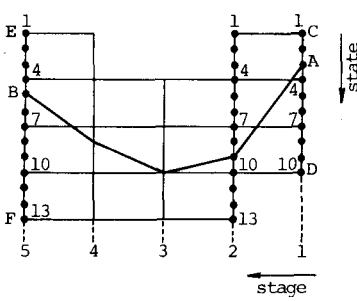


図-5 プログラム機能の説明

4. 適用例および結言：図-6に示すように局部載荷をうける粘土地盤のすべり面探索結果を呈示しよう。この地盤の物性値は参考文献2)の表-1に要約されている異方圧密モデルであって、分布荷重  $P \text{ t/m}^2$  のもとで弾塑性非排水解析（Christian 流）を行った。ここに  $\phi' = 39^\circ$ ,  $c' = 0$  とする。図-7におのおの図中に示す荷重段階で探索されたすべり面形と安全率を示している。ただし、今の場合すべり面の左端点が図-6の節点19と25の間に出現すると仮定している。探索に要したCPU timeはFACOM, M-360で1ケース約2.8秒であった。詳細は当日に譲らざるをえないが、満足すべき結果とみている。

【参考文献】1) 山上・植田：動的計画法～，第19回土質工学発表会。  
2) 春本，他：第38回土木学会年講，第3部門，pp. 501～502，昭58年。

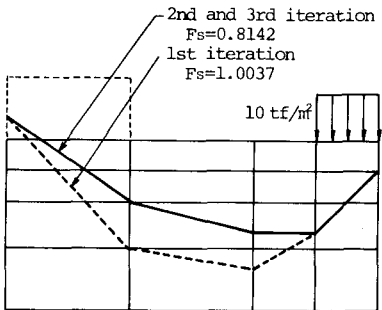
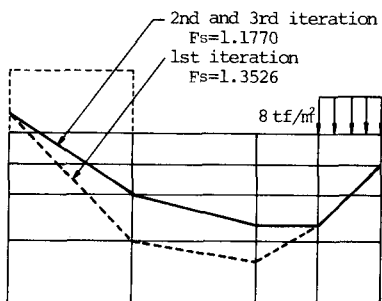
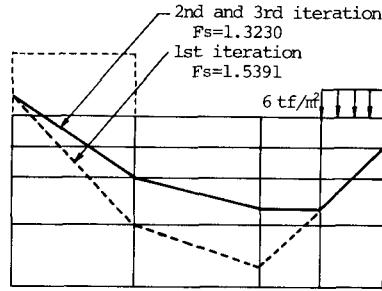


図-7 潜在すべり面の探索結果

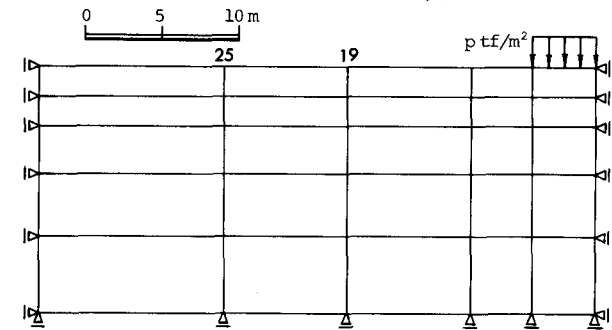


図-6 等分布局部載荷をうける粘土地盤の要素分割図