

東北大学(正) 飛田 善雄
同上 柳沢 栄司

まえがき Taylor・Bishopのダイレタンシーに対するエネルギー補正の提案以来、ダイレタンシーは、砂の様な粒状体の強度成分の一つとして考えられてきた。従来のダイレタンシー機構は Newland・Allelyのモデル：巨視的すべり面から、実際の微視的すべり面がずれている事により、せん断に伴い体積変化が必然的に生ずる、に基づくものである。これは物理的に理解し易く広く受け入れられている。しかし、近年、微視的な構造・運動を詳細に調べた実験により、このダイレタンシー機構に疑問が投げかけられている。¹⁾ ここでは、2つの異なるダイレタンシー機構とその数値的表現について述べ、その2つの機構の基本的差異について考察を加える。対象とするのは、せん断変形後期 α 、充分に異方的な内部構造が発達した状態であり、初期の負のダイレタンシーについては別の機会に議論する。座標系は直交デカルト座標であり、座標軸は図により与えられる。

1. 粒子相互のすべりによるダイレタンシー機構とその表現²⁾

この場合には、まず巨視的すべり面の方角を決定する必要がある。すべり面の数は複数個存在してもよい。基準デカルト座標軸 ξ に対し、巨視的すべり面の法線方向が $n^{(a)}$ 、すべり面の方角が $S^{(a)}$ と与えられるものとする。単純せん断変形機構を微視的な単位過程として考える。せん断すべり速度が $\dot{\gamma}$ 、膨張速度(n 方向)が $\dot{v}$ 、微視的ダイレタンシー α 尺度 $\tan \nu^{(a)} = \dot{v} / \dot{\gamma}^{(a)}$ と与える時、このすべり系 α の全体の変形速度 D_{ij} に対する寄与は幾何学的に(1)式で与えられる。又、考えている単位領域で N 回すべっている時は(2)式で与えられる。

$$D_{ij}^{(a)} = P_{ij}^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)} \quad ; \quad P_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2} (S^{(a)}_i n^{(a)}_j + S^{(a)}_j n^{(a)}_i) + \tan \nu^{(a)} n^{(a)}_i n^{(a)}_j \quad (1)$$

$$\bar{D}_{ij}^* = \sum_{a=1}^N P_{ij}^{(a)} \dot{\gamma}^{(a)} \quad (2) \quad \bar{D}_{ij}^* = \frac{1}{2} (\partial \bar{v}_i / \partial x_j + \partial \bar{v}_j / \partial x_i) \quad \bar{v}_i: \text{領域内の平均速度} \quad (3)$$

一般的には、すべり相互の干渉、その他により、(2)式 α 量と領域の境界条件により決定される(3)式 α 量とは一致しない。(この議論では、弾性変形 D_{ij}^e の大きさを無視している)しかし、以下では $\bar{D}_{ij}^* \cong D_{ij}$ として議論をすすめていく。簡単のため、(1)、(2)式を二軸圧縮状態の平面変形について考える。巨視的すべり面の方角 $E(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ ： $\phi = \sin^{-1}(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1})$ ； $\sigma_2 > \sigma_1$ 、圧縮と正とする。)、に限定する。観測時間内に自由に2つのすべり α, β が生じたものとする。(図1参照)この状況を(2)式に代入して、結果を求めると、(詳細は文献2)

$$\bar{D}_{11}^* = -2(\dot{\gamma} \cos \phi - \dot{v} \sin \phi), \quad \bar{D}_{22}^* = 2(\dot{\gamma} \cos \phi + \dot{v} \sin \phi) \quad (4)$$

$$\text{他の成分は } 0: (\bar{D}_{12}^*, \bar{D}_{21}^* = -\bar{D}_{11}^*, \bar{D}_{12}^* = \sum_{a=1}^2 \frac{1}{2} (S^{(a)}_1 n^{(a)}_2 - S^{(a)}_2 n^{(a)}_1))$$

$$(4) \text{式より } \sin \nu^* = (\bar{D}_{12}^* + \bar{D}_{21}^*) / (\bar{D}_{11}^* - \bar{D}_{22}^*) \text{ を求めると、}$$

$$\sin \nu^* = \frac{2\dot{v}}{4\dot{\gamma} \cos \phi} = \frac{\tan \nu}{\cos \phi} \quad (5)$$

上式において、 $G = \cos(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ 、 $S = \sin(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ この機構がダイレタンシーと与える事は明らかである。すなわち、巨視的すべり面に対して粒子の運動方向がずれている時には、ダイレタンシーを伴う事になる。すべり面に対して粒子が垂り越える場合には、正のダイレタンシーに寄与し、下がる場合には負のダイレタンシーに寄与する事になる。〔注、膨張速度 $\dot{v}^{(a)}$ は図1の座標系では負符号である。これは圧縮(基準座標軸の反対方向)と正としているために生ずる。 ν^* は膨張の時正とする。〕

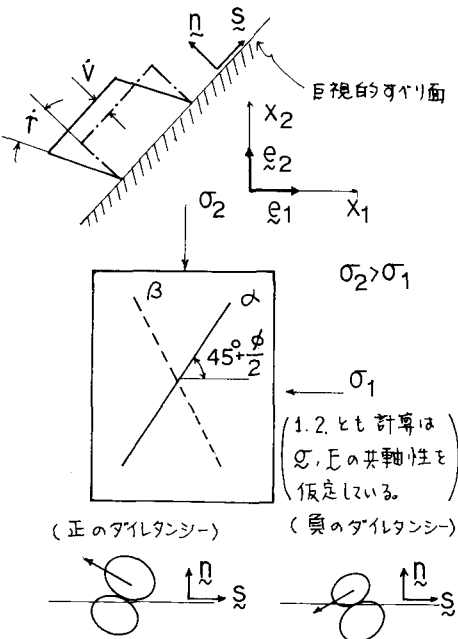


図1: すべりによるダイレタンシー機構

2. 有効接点により形成される異方的構造によるダイレタンシー機構と表現

先に著者は、修正応力なる概念を導入し、この修正応力 σ_{ij}^* はフアリク・テンソル E と巨視的応力 σ_{ij} の主軸が一致する場合に、理想的な等方構造を有する粒状体に対して定義される応力とした。

$$\sigma_{ij}^* = A_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \quad ; \quad A_{ik} = F_{ik}/F_0^* \quad A_{ik}^{-1} A_{kj} = \delta_{ij} \quad (6)$$

ここに、 F_{ik} : 実際の粒状体をもつ、有効接点(粒子間カエ伝達接点)に関するフアリク・テンソル F_0^* : 理想的な粒状体をもつフアリク・テンソルの値 ($F_0^* = F_1^* = F_2^* = F_3^*$)

等方構造を有する理想的な粒状体に対して、いま線形の応力速度、変形速度関係を考える。

$$D_{ij}^* = C_{ijkl}^* \dot{\sigma}_{kl}^* \quad (C_{ijkl}^*, \text{ constant}) \quad (7)$$

変形時、理想化された粒状体と実際の異方的粒状体のなす行事が等しければ、(この仮定 α の妥当性は明らかにする)

$$\sigma_{ij}^* D_{ij} = \sigma_{ij}^* D_{ij}^* \quad (8) \quad (D_{ij} - A_{ik}^{-1} D_{kj}^*) \sigma_{ij} = 0 \rightarrow D_{ij} = A_{ik}^{-1} D_{kj}^* \quad (9)$$

(6) 式と (9) 式、また $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{A}_{ik}^{-1} \sigma_{kj} + A_{ik}^{-1} \dot{\sigma}_{kj}$ を (7) 式に代入して整理すると、

$$D_{ij} = (A_{pc})^{-1} C_{pjke}^* \dot{\sigma}_{me} (\dot{A}_{km})^{-1} + (A_{pc})^{-1} C_{pjke}^* (A_{km})^{-1} \dot{\sigma}_{me} \quad (10)$$

よって瞬間において、構造変化の項 $(\dot{A}_{pc})^{-1} \cong 0$ と仮定する事允許されれば、異方的な構造を有する粒状体の変形速度と応力速度の関係は次式で与えられる：

$$D_{ij} = (A_{pc})^{-1} C_{pjke}^* (A_{km})^{-1} \dot{\sigma}_{me} \quad (11)$$

(11) 式を最も単純なケースである、図1に示す二軸圧縮試験時の平面変形に適用すると $(E$ と E の主軸に一致) (12)

$$D_1 = (C_{11}^*/A_1^2) \dot{\sigma}_1 + (C_{12}^*/A_1 A_2) \dot{\sigma}_2, \quad D_2 = (C_{12}^*/A_1 A_2) \dot{\sigma}_1 + (C_{22}^*/A_2^2) \dot{\sigma}_2 \quad C_{11}^* = C_{22}^* = \frac{1}{E^*}, C_{12}^* = \frac{\nu^*}{E^*}$$

いま、平均主応力一定試験： $\dot{\sigma}_1 = -\dot{\sigma}_2 < 0$, について、 $(D_2 + D_1)$ と $(D_2 - D_1)$ を求めると、

$$(D_2 + D_1) = \frac{1}{E^*} \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right) \dot{\sigma}_1 \quad (D_2 - D_1) = \frac{1}{E^*} \left[\frac{-2\nu^*}{A_1 A_2} - \left(\frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{A_2^2} \right) \right] \dot{\sigma}_1 \quad (13)$$

ダイレタンシー角を求めてみると、[注、(13)式までは圧縮が正、ダイレタンシー角は膨張が正である]

$$-\sin \psi^* = (A_2^2 - A_1^2) / (2\nu^* A_1 A_2 - (A_2^2 + A_1^2)) \cong (A_1^2 - A_2^2) / (A_2^2 + A_1^2) \quad (\nu^* \cong 0) \quad (14)$$

一般的にせん断変形が可及めば、 $A_2 > A_1$ となり、正のダイレタンシーが生ずる。

実際のメカニズムと(10)式、(11)式によるダイレタンシーがどのような関係にあるのかは明確ではないが、粒状体に作用する外力により、有効接点によるフアリク・テンソルがその形を変化させる機構と密接に関連があるものと思っている。(11)式によりダイレタンシーが生ずるという事は、異方的な構造はダイレタンシーを生じさせる事を意味している。

3. 考察 両者のモデルとも正のダイレタンシーを表現し得る事は明らかである。この2つのモデルの基本的な差異は (a) 巨視的可べり面を考えるか否か？ (b)、1. のモデルではダイレタンシーはせん断力に抵抗する因子となり、破壊時の主応力比を増加させる原因と考えられるのに対し、2. のモデルではダイレタンシーは異方的構造となった結果、生ずるものであると解される。現時点においては、物理機構、数学的表現の簡明さにおいて

1. の可べりモデルの方が優れている。しかし、(i)、力を伝える粒子では可べりは生じにくく、可べりは力伝えない粒子間に多い。(ii) 力を伝える粒子の運動は回転が多い。等の報告は、1. のモデルの適切な疑問を与えている。又、繰返し変形時のダイレタンシー機構(特に変相線を超えて載荷した時の除荷時の負のダイレタンシー)を1. のモデルのみで説明する事は困難である。これらの事より1. 以外のダイレタンシー機構を考察する事は意味のある事である。結論、ここで述べた2. のモデルは、今後物理的考察に基づいて修正されるべき性質のものである。可べり変形以外にも、ダイレタンシーは生ずるという事は示し得るものと思う。

参考文献 本研究は文部省科研費 NO. 58750395 の補助を受けたものである。

- 1) 小田「微視的構造と構成式—その1粒状体の場合」工と基礎 Vol. 32 No. 3 PP. 67~73 (1984)
- 2) 飛田、柳沢「準微視的観点からの粒状体の変形挙動に関する2, 3の考察」第19回工機工学研究発表会(1984)
- 3) Y. Tobita「The significance of the fabric tensor ...」Mechanics of Granular Materials (ed. Jenkins & Satake) pp. 41~52 (1983)