

名古屋工業大学 正員 中井 照夫

松岡 元

さて、力学量  $t_{ij} = \sigma_{i\alpha} \cdot a_{\alpha j}$  ( $a_{\alpha j}$ : 空間滑動面(SMP)の方向余弦を主値とする対称テンソル)に基づく塑性仕事相当量  $W^p = \int t_{ij} d\epsilon_{ij}^p$  を用いた3次元応力下の正のダイレイタンスー挙動が説明可能な砂の弾塑性モデルを導いている<sup>2)</sup>。一方、土の塑性ひずみ増分が等方的な圧縮成分と  $t_{ij}$  空間で関連流動則が成り立つダイレイタンスー成分に分離できるという考えより、ひずみ増分方向の応力経路依存性が表現可能な粘土の弾塑性モデルも提案している<sup>3)</sup>。ここでは、両モデルの基本的な考え方を生かして、砂の正負のダイレイタンスー特性が表わせ、かつひずみ増分方向の応力経路依存性が表現できる簡単なパラメータが少なく決めやすい形の弾塑性構成式を誘導することを目的とする。なお、提案式の実験データによる検証は本概要集別報で行なっている。

1. 砂の弾塑性構成式の誘導

一般に砂の全ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}$  は弾性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^e$  と塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  の和で与えられるが、ここでは粘土の構成式同様、式(1)に示すように  $d\epsilon_{ij}^p$  を等方圧縮成分  $d\epsilon_{ij}^{p(iso)}$  とダイレイタンスー成分  $d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  に分離して考える。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{p(iso)} + d\epsilon_{ij}^{p(dil)} \quad \dots\dots (1)$$

(i) 弾性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^e$  の決め方

$d\epsilon_{ij}^e$  は弾性式  $(d\epsilon_{ij}^e = \{(1+\nu_e)/E_e\} d\sigma_{ij} - (\nu_e/E_e) d\sigma_{kk} \delta_{ij} \dots\dots (2))$  を利用して決定する。図-1は豊浦砂のゆる詰め ( $e_0 \approx 0.83$ ) および密詰め ( $e_0 \approx 0.68$ ) 試料の等方圧縮・除荷試験結果を整理したものである。同図より、除荷(弾性時)の体積ひずみは、 $(\epsilon_v^e) = C_e \{ (\sigma_m/P_a)^m - (\sigma_m^0/P_a)^m \} \dots\dots (3)$  ( $\sigma_m$ : 平均主応力,  $P_a$ : 大気圧,  $m=0.3$ ) と表わされる。したがって、式(2)の  $E_e$  は次式で与えられる ( $\nu_e$  は0と仮定する)。

$$E_e = 3(1-2\nu_e) \cdot K_e = \{ 3(1-2\nu_e) P_a^m \} / \{ m \cdot C_e \cdot \sigma_m^{m-1} \} \dots\dots (4)$$

(ii) 塑性ひずみ増分の等方圧縮成分  $d\epsilon_{ij}^{p(iso)}$  の決め方

$d\epsilon_{ij}^{p(iso)}$  は、等方圧縮時の塑性体積ひずみが図-1より  $(\epsilon_v^p)^{iso} = (C_2 - C_e) \cdot \{ (\sigma_m/P_a)^m - (\sigma_m^0/P_a)^m \} \dots\dots (5)$  と表わされるので、次式で与える。

$$d\epsilon_{ij}^{p(iso)} = \frac{\delta_{ij}}{3} \cdot (d\epsilon_v^p)^{iso} = \frac{\delta_{ij}}{3} \cdot \{ m(C_2 - C_e) \sigma_m^{m-1} / P_a^m \} \langle d\sigma_m \rangle = \frac{\delta_{ij}}{3} \cdot K \cdot \langle d\sigma_m \rangle \dots\dots (6)$$

( $\langle d\sigma_m \rangle$  は  $d\sigma_m > 0$  の時  $\langle d\sigma_m \rangle = d\sigma_m$ ,  $d\sigma_m \leq 0$  の時  $\langle d\sigma_m \rangle = 0$  を表わす)

(iii) 塑性ひずみ増分のダイレイタンスー成分  $d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  の決め方

粘土の構成式同様、 $d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  は  $t_{ij}$  空間で関連流動則が成り立つと考えているので、降伏関数を  $f$  とした時、 $d\epsilon_{ij}^{p(dil)} = A \cdot (df / \sigma_{ij}) \dots\dots (7)$  で与えられる。さて、相異なる3主応力下のせん断試験結果がSMPIに基づく応力比 ( $X \equiv t_N/t_N$ ) ~ ひずみ増分比 ( $Y \equiv d\epsilon_{SMP}^* / d\epsilon_{SMP}^*$ ) 関係でユニークに整理されることから、図-2の応力比~塑性ひずみ増分比関係 ( $Y = (X_f - X) / \alpha + Y_f \dots\dots (8)$ ) を仮定する。ここに、( $t_N, t_0$ ) および ( $d\epsilon_{SMP}^*, d\epsilon_{SMP}^*$ ) はそれぞれ  $t_{ij}$  の主値ベクトルおよび塑性主ひずみ増分ベクトルのSMPIに垂直な成分と平行な成分を表わす<sup>1)</sup>。また、 $X_f, Y_f$  は破壊時の  $t_N/t_N$  と

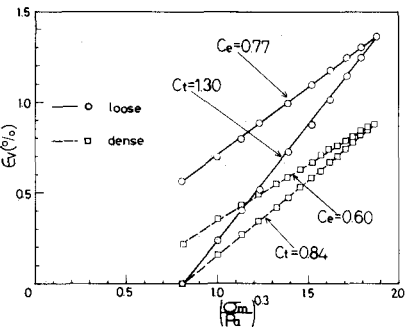


図-1 等方圧縮試験の載荷・除荷試験結果

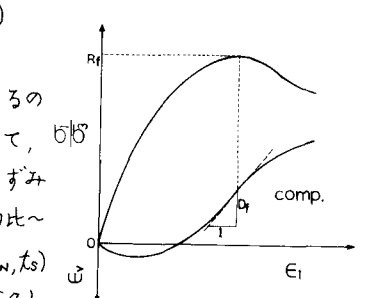
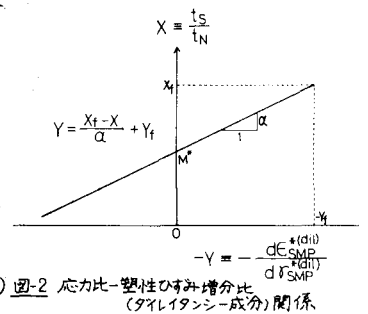


図-3  $R_f, D_f$  の説明

$d\epsilon_{smp}^*/d\epsilon_{smp}^*$ であり、図-3に示す三軸圧縮試験の破壊時の主応力比  $R_f \equiv (\sigma_1/\sigma_3)$  およびその時のダイレイタンスの勾配  $D_f \equiv (d\epsilon_v/d\epsilon_1)_f$  を用いて次式で与えられる ( $R_f, D_f$  は応力経路の影響を受けないので通常の側圧一定試験から決められる)。

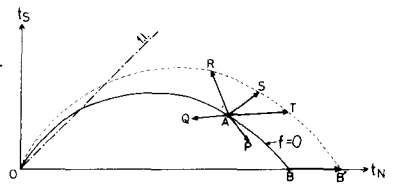


図-4 ( $\sigma_1, \sigma_3$ )空間の降伏曲面と応力経路

$X_f = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{R_f} - \sqrt{1/R_f}) \dots (9)$ ,  $Y_f = \{1 + \sqrt{R_f}(D_f - 1) / [\sqrt{2}R_f - \frac{1}{\sqrt{2}}(D_f - 1)]\} \dots (10)$   
 ゆえに、 $d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  は  $\epsilon_{ij}$  空間で関連流動則が成立すると考えているので、直交条件式と式(8)より降伏関数  $f$  は次式となる。

$f = \ln t_N - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln |1 - (1-\alpha) \frac{X}{M} - C| = 0, (M = X_f + \alpha Y_f) \dots (11)$   
 一方、砂では  $\epsilon_{ij}$  を用いた塑性仕事相当量  $W^{*p} = \epsilon_{ij}^2$  が応力経路に依存しない状態量と考えられるので、 $W^{*p}$  を硬化パラメータとして最終的に  $f$  は式(12)で表わされる(誘導の詳細は文献と同様)。

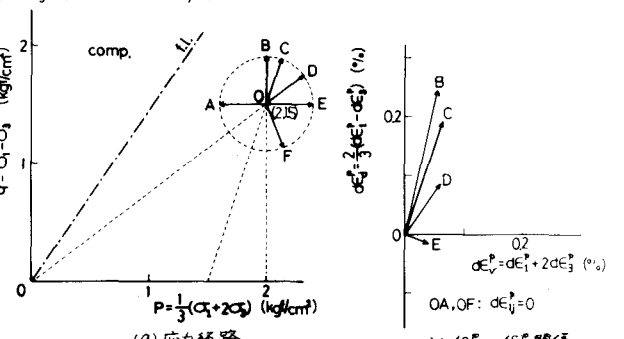


図-5 stress probe 試験の解析結果

$f = \ln t_N - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln |1 - (1-\alpha) \frac{X}{M} - C| - \frac{1}{2n+1} \ln (\frac{W^{*p}}{K} + t_{N0}^{2n+1}) = 0 \dots (12)$   
 $(K_i = \frac{m(C_k - C_0)}{\sqrt{3(m+1)}P_k^2}, t_{N0} = 0.2 t_N = t_{N0}$ の時  $W^{*p} = 0$  とする)

ところで、 $f$  は  $f = f(\epsilon_{ij}, a_i, W^{*p}) = f(\sigma_{ij}, W^{*p}) = 0$  なる形で表わされるので、Prager の適応条件より、 $df = (\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}) \cdot d\sigma_{ij} + (\frac{\partial f}{\partial W^{*p}}) \cdot dW^{*p} = 0 \dots (13)$  となる。

ここに、 $dW^{*p}$  は  $dW^{*p} = \epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij} (d\epsilon_{ij}^{p(cio)} + d\epsilon_{ij}^{p(dil)}) = \epsilon_{ij} \{ \lambda \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial W^{*p}} \cdot K \cdot \langle d\sigma_m \rangle \} \dots (14)$  と書き表わされる。式(13),(14)より  $\lambda$  は次式で与えられる。

$\lambda = - \{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial W^{*p}} \cdot t_{nm} \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial W^{*p}} \cdot K \cdot \langle d\sigma_m \rangle \} / \{ \frac{\partial f}{\partial W^{*p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \cdot \epsilon_{ij} \} \dots (15)$

したがって、式(1),(2),(6),(7)より種々の応力経路下の  $d\epsilon_{ij}$  が計算される。

## 2. 構成モデルの基本的性質

いま、図-4に示すように ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) 空間で表わした降伏曲面上のA点に応力状態があり、応力状態がA点からP, Q, R, S, T方向に変化する場合のひずみ増分について考察する。まず、(i)  $df \leq 0$  の時(P, Q方向に変化する時)弾性ひずみだけとなるので  $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e$  となる。次に(ii)  $df > 0$  の時(R, S, T方向に変化する時)、A点からR, S, T点までの  $dW^{*p}$  の変化はすべて同じであっても応力経路の違いによって塑性ひずみ増分の発生の仕方は異なる。例えば、R方向のように  $d\sigma_m \leq 0$  の時式(6)より  $d\epsilon_{ij}^{p(cio)} = 0$  となり、 $dW^{*p} = \epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  と表わされるので塑性ひずみ増分はすべて  $\epsilon_{ij}$  空間で関連流動則を満たす  $d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  となる ( $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$ )。A点からS方向に変化する ( $df > 0$  &  $d\sigma_m > 0$ ) 時、 $dW^{*p} = \epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^{p(cio)} + \epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$  となり塑性ひずみ増分は等方圧縮成分とダイレイタンス成分の和として表わされることになる ( $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{p(cio)} + d\epsilon_{ij}^{p(dil)}$ )。なお、等方圧縮応力経路(BB')やATのように  $dW^{*p} = \epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^{p(cio)}$  となる応力経路下では当然のことながら等方的な塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^{p(cio)}$  しか生じない。

図-5はゆる詰め砂のパラメータを用いて計算したstress probe 試験の応力経路と解析結果を示している。解析結果は応力経路の違いによる塑性ひずみ増分方向の差違をよく表わしており、龍岡らによる砂のstress probe 試験の実験結果ともよい対応を示している。ただ、 $\gamma$ 一定で  $\rho$  が減少する経路(OA)では実験上は塑性ひずみが生じるが、解析結果は  $df < 0$  ゆえ  $d\epsilon_{ij}^p = 0$  となる。ところで、普通のようなひずみ増分方向の応力経路依存性を表わすための1手法として複数の独立な降伏関数、塑性ポテンシャル、ひずみ硬化関数等を仮定することがあるが、そのような場合には独立なこれらの関数のパラメータを決めるため多くの試験が必要となる。

謝辞 実験解析に協力いただいた本学学部生高柳誠司、元学部生 塩見秀樹、江原直樹、竹中仁君に感謝致します。

文献 1) 中井・三原(1984): S&F, Vol. 24, No. 2, 投稿中 2) 中井・松岡・定田(1983): 才18回土質工学研究発表会, Vol. 1, PP. 335-338  
 3) 中井・松岡・藤原・春木(1984): 才19回土質工学研究発表会, 投稿中 4) 高柳・中井・塩見・江原・竹中(1984): 本講演概要集, 同題名(その2)  
 5) 中井・松岡(1980): 土木学会論文報告集, No. 303, PP. 65-77 6) 龍岡・石原(1974): S&F, Vol. 14, No. 2, PP. 63-76