III-2　　マルコフ・モデルに関する一考察

日本道路公団　正員　川井田　実
鹿児島大学工学部　正員　北村　良介

1. まえがき

著者らは、砂質土のような粒状体に対し、マルコフ・モデルと称する力学モデルを提案し、種々の応力条件下での砂質土の変形挙動に適用してきている[1),2),3)]。そして、適用に際しては変形過程での砂質土になされた仕事量、および、その可逆成分の正確な評価がキーポイントになっていることを指摘した[2)]。

本報告では、せん断過程、および、応力比一定圧縮過程での粒状体になされる仕事量の評価法について若干の考察を加えている。

2. 粒状体になされる仕事量

物体が熱的に孤立しており、熱膨張を無視すると、静的な変形過程での物体になされる単位体積当りの仕事増分は次式で求められる。

$$dW = \sigma_{kl} \cdot d\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

ここに、dW：仕事増分、σ_{kl}：応力テンソル、
$d\varepsilon_{kl}$：ひずみ増分テンソル。

マルコフ・モデルでは、粒状体になされた仕事増分は、応力と応力増分の関数として表現する必要があり、せん断過程、応力比一定圧縮過程に対して、それぞれ、次式のような実験式を用いてきている。

せん断過程：

$$\tau/\sigma_N = \frac{W}{a + d \cdot W} \tag{2}$$

ここに、W：粒状体になされた仕事量、
τ/σ_N：松岡・中井[4)]の提案しているSMP上でのせん断・垂直応力比。

応力比一定圧縮過程：

$$\log W = a + d \cdot \log \sigma_m \tag{3}$$

ここに、σ_m：平均有効主応力。

(2), (3)式中の a, d はパラメータであり、豊浦砂に対して、せん断過程では、$0.215 \leqq a \leqq 5.273$, $0.725 \leqq d \leqq 1.540$ の範囲に、また、応力比一定圧縮過程では $0.284 \leqq a \leqq 0.407$、$1.240 \leqq d \leqq 1.540$ の範囲にあり、ほぼ応力経路に依存しないパラメータと考えられる。しかし、間隙比には依存し、材料定数とはなっていない。そこで、ここでは、実験式である(2), (3)式にかわって演繹的に誘導された式によって粒状体になされた仕事増分を評価する手法についての考察を試みる。

(1)式は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} dW^p &= \sigma_m \cdot d\varepsilon_v^p + S_{ij} \cdot de_{ij}^p \\ &= \sigma_m \left\{ d\varepsilon_v^p + \frac{S_{ij}}{\sigma_m} \cdot de_{ij}^p \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここに、dW^p：不可逆な仕事増分、
$d\varepsilon_v^p$：不可逆な体積ひずみ増分テンソル、
de_{ij}^p：不可逆な偏差ひずみ増分テンソル、
S_{ij}：偏差応力テンソル。

(4)式には、$d\varepsilon_v^p$, de_{ij}^p という2つのひずみ増分成分が含まれている。一方、マルコフ・モデルでは dW^p が応力と応力増分の関数として表現されなければならない。したがって、ひずみ増分成分を消去するため、粒状体の力学特性を表現している2つの関係式が必要である。そこで、ここでは、せん断過程に対しては、次に示す柴田[5)]の導いたダイレイタンシー特性式と塑性論で導かれている直交則を用いてみる。

柴田のダイレイタンシー式：

$$d\varepsilon_v^p = D \cdot d\left(\sqrt{2J_2} / \sigma_m \right) \tag{5}$$

ここに、D：ダイレイタンシー係数、
J_2：偏差応力の2次不変量。

直交則：

$$d\varepsilon_v^p / d\left(\sqrt{2J_2^{\prime p}}\right) = -\frac{d\left(\sqrt{2J_2}\right)}{d\sigma_m} \tag{6}$$

ここに、$J_2^{\prime p}$：不可逆な偏差ひずみの2次不変量。
ただし、(6)式は、降伏関数が応力、および、不可逆なひずみの3次不変量に関係しない場合の直交則である。

(4), (5), (6)式を連立し、$d\varepsilon_v^p$, de_{ij}^pを消去すると、次のようになる。

$$dW^p=\sigma_m\left\{1+\left(\frac{d\sigma_m}{\sigma_m}\right)\Big/\frac{d(\sqrt{2J_2})}{\sqrt{2J_2}}\right\}\cdot D\cdot d\left(\frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m}\right) \quad (7)$$

応力比一定圧縮過程に対しては、直交則と次に示す間隙比eと$\log\sigma_m$の間の線形関係式を用いることにする。

$$d\varepsilon_v^p=\frac{C_c-C_s}{1+e}\log\frac{\sigma_m+\Delta\sigma_m}{\sigma_m} \quad (8)$$

ここに、C_c：圧縮指数、C_s：膨張指数。
(4), (6), (8)式を連立し、$d\varepsilon_v^p$, de_{ij}^pを消去すると、次のようになる。

$$dW^p=\sigma_m\left\{1+\left(\frac{d\sigma_m}{\sigma_m}\right)\Big/\frac{d(\sqrt{2J_2})}{\sqrt{2J_2}}\right\}\cdot\frac{C_c-C_s}{1+e}\log\frac{\sigma_m+\Delta\sigma_m}{\sigma_m} \quad (9)$$

(7), (9)式が(2), (3)式にかわって演繹的に導かれた不可逆な仕事増分を評価する式となる。しかし、(7)式中のダイレイタンシー係数Dは正規圧密粘土の場合には材料定数となりうる[5]が、砂質土のような粒状体の場合には材料定数とはなりえないようである。[6] また、(9)式中の圧縮、膨張指数C_c, C_sは粘土に対しては明確に定義されるが、砂質土のような粒状体に対してはその定義が不明確であること、また、応力比が1（等方圧縮）から大きく離れた場合にはC_c, C_sでは表現できない。[7] これらの点は直交則の妥当性とともに今後の検討事項である。

次に、等方圧縮過程について、(3)式と(9)式によって評価される仕事増分を比較するため、(10)式を用いて仕事量Wと平均有効主応力σ_mの関数を数値的に求めた。計算に際しては、$C_c=0.041$, $C_s=0$、初期間隙比$e_0=0.88$とした。図-1は、その結果を両対数紙上にプロットしたものである。図には、三軸装置を用いた豊浦砂の等方圧縮試験より得られた実測値も示されている。図より、実測結果も数値実験結果もともに$\log W$と$\log\sigma_m$の間には(3)式のような線形関係があること、また、その傾きはほぼ等しいことがわかる。

これまでに、粒状体になされる仕事量の評価手法について考察を加えてきた。図-2は、これらの評価式がマルコフ・モデルにおいてどのような位置にあるのかを示したフローチャートである。図において、応力状態の変化により粒状体になされる不可逆な仕事増分を求めるに際し、(2)、(3)式、あるいは、(7)、(9)式が必要となるわけである。

3. あとがき

本報告では、砂質土のような粒状体の変形過程において、粒状体になされる不可逆な仕事増分を応力と応力増分の関数として表現する手法について考察を加えた。そして、そのためには、ひずみ増分と応力増分を関係づける２つの粒状体の力学特性を表現できる式が必要であることがわかった。今後は、この点に留意して粒状体の力学特性について検討し、また、あわせて可逆な仕事増分の評価法についても考察を加えたい。

最後に、日頃からお世話になっている鹿大春山教授に謝意を表します。

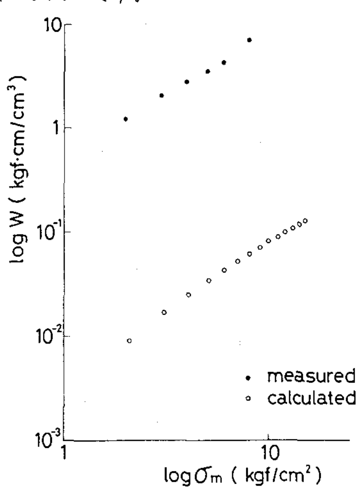

図-1 等方圧縮過程での$\log W\sim\log\sigma_m$関係

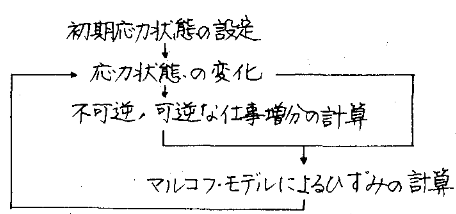

図-2 マルコフ・モデルの概要を示すフローチャート

（参考文献）

1) 北村・川井田：第19回土質工学研究発表会, 1984.
2) 北村・川井田：第19回土質工学研究発表会, 1984.
3) 北村・佐藤・川井田：第19回土質工学研究発表会, 1984.
4) Matsuoka, H. and Nakai, T: Proc. JSCE, No.232, 1974.
5) 柴田：京大防災年報, 第6号, 1963.
6) 八木：京大博士論文, 1974.
7) 中井：京大博士論文, 1980.