

III-1 最大エントロピー法則による粒状体の歪硬化関数の定式化

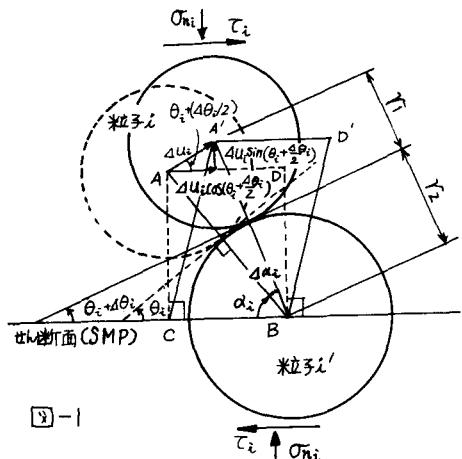
東北大学工学部 正員 新開 茂

1) まえがき

離散的な粒状体の連続体モデルを構成する場合、必要とされる幾つかの構成関係式のうちで、歪硬化関数は最も重要なものの一つであるが、歪硬化関数の定式化は困難であり、現在までに、ごく少數の研究しか行なわれていない。本文は、微視的観点から歪硬化機構を解析し、非平衡過程における最大エントロピー法則を応用することにより、理論的観点から歪硬化関数の定式化を行なつたものである。

2) 微視的観点からの粒状体の歪硬化機構の解析

粒子間接触角の変化により、歪硬化が生じるという観点から粒状体の微視的歪硬化機構の解析を行う。初めに、下図に示すような2粒子間のせん断歪について考える。



上図に示すように、半径 r_i の粒子 i が、半径 $r_{i'}$ の粒子 i' に対して、相対的に運動し、中心 A から Δu_i だけ離れた点 A' に移動し、2粒子 i, i' の共通接平面とせん断面との成す角が θ_i から $(\theta_i + 4\theta_i/2)$ に変化したものとすれば、粒子 i の中心 A はせん断面(SMP)に平行に $\Delta u_i \cos(\theta_i + 4\theta_i/2)$ 、垂直に $\Delta u_i \sin(\theta_i + 4\theta_i/2)$ だけ移動したことになり、矩形 $ACBD$ は平行四辺形 $A'C'D'B'$ に変形する。したがって、幾何学的関係より、2粒子の相対運動によるせん断歪増分は

$$\Delta \gamma_i = \frac{\Delta u_i \cos(\theta_i + 4\theta_i/2)}{l_i \sin \alpha_i + \Delta u_i \sin(\theta_i + 4\theta_i/2)} \quad (2.1)$$

ただし

$$r_i + r_{i'} = l_i \quad (2.2)$$

$\Delta u_i \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta \theta_i \rightarrow 0$ であるから、式(2.1)より

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{du_i} &= \lim_{\Delta u_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma_i}{\Delta u_i} = \lim_{\Delta u_i \rightarrow 0} = \frac{\cos(\theta_i + 4\theta_i/2)}{l_i \sin \alpha_i + \Delta u_i \sin(\theta_i + 4\theta_i/2)} \\ &= \frac{\cos \theta_i}{l_i \sin \alpha_i} \end{aligned} \quad (2.3)$$

また、図-2-1より

$$\alpha_i + \theta_i = \pi/2 \quad (2.4)$$

であるから、式(2.3)は、次のように書き換える。

$$d\gamma_i = du_i / l_i \quad (2.5)$$

上式は、2粒子間の微小相対変位増分 du_i とせん断歪増分の関係であり、力学的に接触し、互いに相互作用を及ぼし合っている全ての2粒子間に對して、同様な関係が成立する。したがって、粒子集合体中の互いに相互作用を有する全ての2粒子間の平均的せん断歪増分 $d\gamma$ を

$$d\gamma = \sum d\gamma_i l_i / \sum l_i \quad (2.6)$$

によって定義し、上式に式(2.5)を代入し、2粒子間の相対変位 du_i と2粒子間の中心間距離 l_i の平均を、それぞれ、次式

$$du = \sum du_i / N, \quad l = \sum l_i / N \quad (2.7)$$

によって定義すれば、式(2.6)は、次のように書き換える。

$$d\gamma = du / l \quad (2.8)$$

ただし、 N は有効接触点(互いに力学的に相互作用を及ぼし合っている接触点)の数である。また、式(2.4)より

$$d\alpha_i = -d\theta_i \quad (2.9)$$

また、図-2の幾何学的関係より

$$\Delta u_i = 2l_i \sin(\Delta \alpha_i/2) = l_i [\alpha_i - (\alpha_i + 4\theta_i/2)] \quad (2.10)$$

$$\therefore \frac{du_i}{d\alpha_i} = \lim_{\Delta \alpha_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta \alpha_i} = \lim_{\Delta \alpha_i \rightarrow 0} l_i [1 - (4\theta_i/2)] = l_i \quad (2.11)$$

したがって

$$du_i = l_i d\alpha_i \quad (2.12)$$

$$\text{式(2.5), (2.9), (2.12)より} \quad d\gamma_i = -d\theta_i \quad (2.13)$$

上式の両辺を式(2.6)の定義にしたがって平均化すれば

$$d\gamma = -d\theta \quad (2.14)$$

$$\text{ただし, } d\theta = \sum d\theta_i l_i / \sum l_i \quad (2.15)$$

紙面の都合上、詳細については省略するが、砂のような粒状体は摩擦性の材料であるから、Newland

と Alley の変形モデルを発展させることにより、上記と同様な微視的な観点から、せん断面(SMP)上の粒子集合体に関する垂直応力 σ_n とせん断応力 τ の間の

釣合式

$$\tau/\sigma_n = \tan(\varphi_\mu + \theta) \quad (2.16)$$

を導くことができる。ここに φ_μ は最小体積状態 ($\theta=0$) における内部摩擦角である。ところで、図-1 の変形モデルから導びかれる式(2.14)は、せん断歪の増加に伴う粒子の相対的な運動によりタイレタンシー角 θ は減少することを示している。しかるに、式(2.16)は応力比の增加(せん断歪の増加)に伴い、タイレタンシー角 θ は増加することを示している。このような混乱を回避する

ために、新らしく、次の2種類のタイレタンシー角

θ^- ：式(2.14)によって定義され、粒子の相対運動に伴って減少するタイレタンシー角

θ^+ ：式(2.16)によって定義され、粒子間接触力の主として介在し、せん断変形の進行と共に増加するタイレタンシー角

を導入する。タイレタンシー角の増減は、粒子間接触力の増減に対応しているから、2つのタイレタンシー角 θ^+ と θ^- は、それぞれ有効接觸点の発生・消滅と関連していると考えられる。タイレタンシー角 θ^+ と θ^- を用いて、式(2.14)と式(2.16)を書き書えれば、

$$d\gamma = -d\theta^- \quad (2.14')$$

$$\tau/\sigma_n = \tan(\varphi_\mu + \theta^+) \quad (2.16')$$

となる。実験データによれば、 $|\theta^+|$ の最大値は 0.6 ラジアン程度であるから、式(2.16')は Taylor 展開により十分な精度で、次式

$$\tau/\sigma_n = \tan \varphi_\mu + \beta \theta^+ \quad (2.17)$$

$$\text{ただし}, \quad \beta = \sec^2 \varphi_\mu \quad (2.18)$$

によって近似可能である。式(2.17)より

$$d(\tau/\sigma_n) = \beta d\theta^+ \quad (2.19)$$

$$d\theta^\pm = \dot{\theta}^\pm dt, d\gamma = \dot{\gamma} dt \text{ を考慮し, 式(2.14)' (2.19)より}$$

$$d(\tau/\sigma_n)/(\beta d\gamma) = -\dot{\theta}^+/\dot{\theta}^- \quad (2.20)$$

3. 最大エントロピー法則による粒子の滑動確率の決定

従来、非線形非平衡過程における最大エントロピー法則は、理論的基礎が与えられてあります。⁵⁾ 仮説として用いられていたが、著者は「熱力学のオイネギ⁴⁾ 法則」と自然界に常に存在する「めらき現象」を基礎とし、非線形非平衡過程に対しても最大エントロピー法則が成立することを示し、理論的基礎を与えた。²⁾

ここでは、この最大エントロピー法則を用いて、粒状体中の単位時間当たりの粒子の滑動確率の決定を行う。粒状体の粒子間に¹⁾ に対するボテンシャル障壁の高さ E

の分布の仕方につけでは 現在、詳細な知識は得られないないが、静水圧下にありて、 E の高さに、何らかの平均値 \bar{E} が存在することは明らかであるから、これをボテンシャル障壁の確率密度関数 $N(E)$ に対する制約条件とすれば、最大エントロピー法則より次の汎関数が得られる。

$$S = -k \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} N(E) \ln N(E) dE + \lambda_0 (\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} N(E) dE - \bar{E}) \quad (3.1)$$

ここに、 k は Boltzmann 定数、 λ_0, λ_1 は Lagrange のパラメータであり、上式の第 2 項は $N(E)$ の正規化の条件である。 $\delta S = 0$ より

$$N(E) = a e^{-bE} \quad (3.2)$$

ここに $a = \exp[(\lambda_0 - \bar{E})/k]$ 、 $b = -\lambda_1/k$ である。砂のような粒状体は摩擦性の材料であるから応力比により変形が支配され、せん断面上にてと σ_n が作用している場合にはボテンシャル障壁の高さが τ/σ_n たゞ 低下すると考えられるので、式(3.2)は次のように修正される。

$$N(E) = a e^{-b[\tau/\sigma_n - \bar{E}]} \quad (3.4)$$

ここに、 α はエネルギーの次元をもつ定数である。速度過程論によれば、上式は応力比 τ/σ_n において、単位時間に接觸点が熱運動の往復をかりてボテンシャル障壁を乗り越えて滑動する確率(速度)を表すことになる。

4) 歪硬化関数の定式化

式(3.4)の N が $\dot{\gamma} = du/dt$ に等しいものとすれば

$$d\gamma = \dot{\gamma} dt \text{ と式(2.8)より} \quad \dot{\gamma} = (a/\epsilon) e^{-b[\tau/\sigma_n - \bar{E}]} \quad (4.1)$$

式(2.20)は、歪硬化率 $d(\tau/\sigma_n)/dY$ は粒状集合体の間にによるタイレタンシー角の変化速度 $\dot{\theta}^+$ と $\dot{\theta}^-$ の相対速度 ($\dot{\theta}^+/\dot{\theta}^-$) によって定まる量であり、 $\dot{\theta}^+$ は τ/σ_n に関する量であるから、 $\dot{\theta}^+$ は一定としても、余り一般性を失うことはないものと思われる。したがって、 $\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}_0$ (一定) とおけば

$$d(\tau/\sigma_n)/dY = \dot{\theta}_0 e^{-b[\tau/\sigma_n - \bar{E}]} \quad (4.2)$$

$$\text{ただし} \quad \dot{\theta}_0 = (\beta l \dot{\theta}_0 / a) e^{b \bar{E}} \quad (4.3)$$

式(4.2)を積分し、 $Y=0$ のとき $\tau/\sigma_n=0$ とすれば

$$\tau/\sigma_n = A \ln(BY+1) \quad (4.4)$$

$$\text{ここに,} \quad A = 1/\alpha b, \quad B = \alpha b \bar{E} \quad (4.5)$$

また、せん断歪 Y に対する歪硬化率¹⁾ は次式となる。

$$d(\tau/\sigma_n)/dY = AB/(BY+1) \quad (4.6)$$

なお、定数 A, B などの詳細な考察は紙面の都合上、後の機会にあらわすこととする。

参考文献

- (1) 松岡元, 中井照夫: 土と基礎, Vol.32, No.2, 1984 PP.83-91
- (2) 新井賀茂: 土工学会東北支部技術研究発表会講演概要, 1984, pp.7-8.
- (3) Newland, H. and Alley, B. H.: Geotechnique, Vol.7, No.1, 1957, PP.17-34.
- (4) 例^{2) は}, Fujisawa, H. and Mori, H.: Progress of Theoretical Physics, Vol.62, 1979, PP.54-60.
- (5) 森肇: 統計力学の進歩(全3巻編) 奉華房, 1981, PP.91-132