

## 1. まえがき

粒子懸濁液に挿入した傾斜板下面には、清澄液と懸濁液との密度差に起因する沈降対流によって、薄い清澄層が発達する。この清澄層流れは懸濁粒子除去効率の改善に著しく寄与すると言われており、水処理においても注目されている。傾斜沈殿の設計法あるいは操作法の確立には、この清澄層流れの解析が不可欠である。ここでは、境界層近似と同様の手法により流れを解析し、清澄層流れと清澄液懸濁液界面におけるその速度勾配との関係を理論的に調べた。その結果は清澄層流れに対する下側傾斜板の影響の評価に利用出来よう。

## 2. 流れの支配方程式とその解

清澄層流れに対する座標系はFig.1に示すとおりで、鉛直からの傾きを $\theta$ 、傾斜板の下端を原点とし、 $x$ 軸を傾斜板の下面に沿って上向きに、 $y$ 軸を $x$ 軸に垂直下向きにとる。流れの支配

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial \hat{y}^2} + \cos \theta = A \left( \hat{u}_x \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{u}_y \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} \right) \quad (1), \quad \hat{x} = 0 \quad \text{で} \quad \hat{\delta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2), \quad \hat{y} = 0 \quad \text{で} \quad \hat{u}_x = 0, \quad \hat{u}_y = 0 \quad (5), (6)$$

$$\hat{u}_x \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} - \hat{u}_y - \sin \theta = 0 \quad (3), \quad \hat{y} = \hat{\delta} \quad \text{で} \quad \hat{u}_x = \hat{u}_x, \quad \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} = G(\hat{x}) \quad (7), (8)$$

方程式は、運動方程式 (Eq. 1)、連続方程式 (Eq. 2)、界面方程式 (Eq. 3) の3つからなる。その境界条件は傾斜板下端 ( $\hat{x} = 0$ )、傾斜板下面 ( $\hat{y} = 0$ )、清澄液懸濁液界面 ( $\hat{y} = \hat{\delta}$ ) で与えられ、それぞれ、Eqs. 4~8のようになる。ただし、 $\hat{u}_x$ と $\hat{u}_y$ とは、それぞれ、清澄層流れの流速の $x$ 成分と $y$ 成分； $\hat{u}_x$ と $\hat{u}_y$ とは清澄液懸濁液界面における $\hat{u}_x$ 、 $\hat{u}_y$ の値； $\hat{\delta}$ は清澄層の厚さ； $A$ は慣性項の大きさの程度を示す無次元数で、次のEqs. 9~11により定義される。 $l$ は傾斜板の

$$A = Re \Gamma^{-1/3}, \quad Re = \frac{l v_\phi}{\nu}, \quad \Gamma = 18 \left( \frac{l}{d_p} \right)^2 \phi \quad (9), (10), (11)$$

水面下長さ[cm]； $\nu$ は清澄液の動粘性係数[cm<sup>2</sup>/sec]； $d_p$ は懸濁粒子径[cm]； $\phi$ は懸濁液の体積分率濃度[-]； $v_\phi$ は懸濁粒子群の鉛直沈降速度[cm/sec]である。支配方程式と境界条件とにおける各変数は $l$ と $v_\phi$ によって無次元化後、さらに $\Gamma$ で伸縮変換されて

$$\hat{x} = \frac{x}{l}, \quad \hat{y} = \Gamma^{1/3} \frac{y}{l}, \quad \hat{\delta} = \Gamma^{1/3} \frac{\delta}{l} \quad (12), (13), (14)$$

$$\hat{u}_x = \Gamma^{-1/3} \frac{u_x}{v_\phi}, \quad \hat{u}_y = \frac{u_y}{v_\phi} \quad (15), (16)$$

おり、Eqs. 12~16で与えられる。ここで、相似変数 $\eta$ および相似

$$\eta = \frac{\hat{y}}{\hat{\delta}} \quad (17), \quad \hat{u}_x = \hat{u}_x \cdot \phi(\eta) \quad (18)$$

解 $\hat{u}_x$ をEqs. 17, 18の様に定義すると $\hat{u}_y$ は連続方程式よりEq. 19のようになる。また、 $\phi(\eta)$ の境界条件はEqs. 6~8

$$\hat{u}_y(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{u}_y(\hat{x}, 0) = \hat{u}_x \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} [\phi \cdot \eta]_0^{\hat{\delta}} - \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} [(\hat{u}_x \hat{\delta})]_0^{\hat{\delta}} \int_0^{\hat{\delta}} \phi d\eta \quad (19), \quad \phi(\eta) = -(\eta+1)\eta^2 + (\eta+2)\eta \quad (20)$$

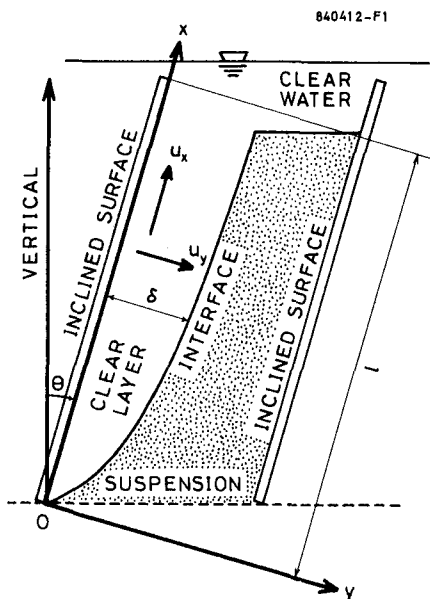


FIG.1.-DEFINITION SKETCH

より、それぞれ、 $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(1) = 1$ ,  $\phi'(1) = -k$  (ただし、 $k$  は未知の定数) となるから、 $\phi(\eta)$  が Eq. 20 の様に決定される。 $\hat{\delta}$  と  $\hat{u}_x$  とは Eq. 1 を  $\hat{y} = 0 \sim \hat{\delta}$  で積分して得られる運動量積分方程式と Eq. 3 より  $\hat{u}_y$  を消去した式との  $\frac{\hat{u}_x}{\hat{\delta}^2} a_2 + \cos \theta = F(\hat{x}) \cdot \cos \theta$  ----- (21),  $\frac{d}{d\hat{x}} (\hat{u}_x \hat{\delta}) a_1 = \sin \theta$  ----- (22)

ら求められる。ただし、 $F(\hat{x})$  は Eq. 23 で、 $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  は Eqs. 24 ~ 26 で与えられる。 $F(\hat{x})$  は (慣性項)/(浮力項)  
 $F(\hat{x}) = \frac{A}{\hat{\delta}} \tan \theta \cdot \left[ \hat{x} \frac{d}{d\hat{x}} (\hat{u}_x \frac{a_2}{a_1}) + (\frac{a_2}{a_1} - 1) \hat{u}_x \right]$ ,  $a_1 = \int_0^1 \phi d\eta$ ,  $a_2 = \int_0^1 \phi^2 d\eta$ ,  $a_3 = \int_0^1 \phi'' d\eta$  ----- (23), (24), (25), (26)

の比の値を示す。水処理における様に  $A$  が小さい ( $O(1)$  程度以下) ときは、 $\hat{u}_x$ ,  $\hat{u}_y$ ,  $\hat{\delta}$  は Eq. 27 ~ 29 で、 $F(\hat{x})$  は Eq. 30 で与えられる。ただし、 $\hat{u}_{x1}$ ,  $\hat{u}_{y1}$ ,  $\hat{\delta}_1$  は Stokes 近似 ( $A = 0$  あるいは  $F = 0$ ) の場合の解で  $F_1$  は Stokes 解で求

$$\hat{u}_x = \hat{u}_{x1} \cdot (1 - F)^{1/3} \text{ ----- (27), } \hat{u}_{x1} = \left\{ \frac{16}{(k+1)(k+4)^2} \right\}^{1/2} \frac{1}{2} \cos \theta \cdot (3 \tan \theta \hat{x})^{2/3} \{ -(k+1)\eta^2 + (k+2)\eta \} \text{ ----- (31)}$$

$$\hat{u}_y = \hat{u}_{y1} \left\{ 1 + \frac{2F}{3(1-F)} \left( \frac{k+1}{k+2} \eta - 1 \right) \right\} \text{ ----- (28), } \hat{u}_{y1} = - \frac{k+2}{k+4} \sin \theta \cdot \eta^2 \text{ ----- (32)}$$

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}_1 \cdot (1 - F)^{-1/3} \text{ ----- (29), } \hat{\delta}_1 = \left\{ \frac{4(k+1)}{k+4} \right\}^{1/3} (3 \tan \theta \hat{x})^{1/3} \text{ ----- (33)}$$

$$F = F_1 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{11a_2 - 6a_1}{5a_2 - 3a_1} \right) F_1 \right\} \text{ ----- (30), } F_1 = \left\{ \frac{4(k+2)}{(k+1)^2(k+4)^2} \right\}^{1/3} \frac{A}{6} \sin \theta (3 \tan \theta \hat{x})^{1/3} \text{ ----- (34)}$$

めた  $F$  の値である。 $A$  が  $O(10^{-1})$  程度よりも小さければ、清澄層流れは Stokes 近似で解析し得る。界面の速度勾配に由来する  $k$  の値は、通常、非常に小さく、清澄層の厚さと懸濁層の厚さとの比により近似する事が可能である。

### 3. 清澄層流れと界面速度勾配

Fig. 2 に清澄層流れの速度分布の一例を示す。(b) の  $\hat{u}_x \sim \hat{y}$  の関係より明らかな如く、 $k$  が大きくなる程、清澄液懸濁液界面の速度勾配は大きくなる。また、 $k$  が大きくなる程、清澄層の厚さが大きくなる。これと逆に、 $k$  が小さくなれば、清澄層の最大流速は小さくなっていく。 $k = 0$  の場合における  $\hat{u}_x$ ,  $\hat{u}_y$ ,  $\hat{\delta}$  の値をそれぞれ  $(\hat{u}_x)_0$ ,  $(\hat{u}_y)_0$ ,  $(\hat{\delta})_0$  とすれば

$$\frac{\hat{u}_x}{(\hat{u}_x)_0} = \left\{ \frac{4(k+1)}{k+4} \right\}^{2/3} \left( 1 + \frac{k}{k+1} \frac{1}{\eta - 2} \right) \text{ ----- (35)}$$

$$\frac{\hat{u}_y}{(\hat{u}_y)_0} = \frac{2(k+2)}{k+4} \text{ ----- (36)}$$

$$\frac{\hat{\delta}}{(\hat{\delta})_0} = \left\{ \frac{4(k+1)}{k+4} \right\}^{1/3} \text{ ----- (37)}$$

となる。従って、 $k = 0.5$  のとき、 $\hat{u}_x$ ,  $\hat{\delta}$  は  $(\hat{u}_x)_0$ ,  $(\hat{\delta})_0$  に対しては約 10% 大きくなる。 $\hat{u}_x$  の  $k$  に対する感度は  $\eta$  が大きい程大きくなり、 $\eta = 1$  では約 20% も小さくなる。清澄層流れに対する  $k$  の影響は、特に平行平板間で傾斜流殻を形成する場合に検討すべきである。

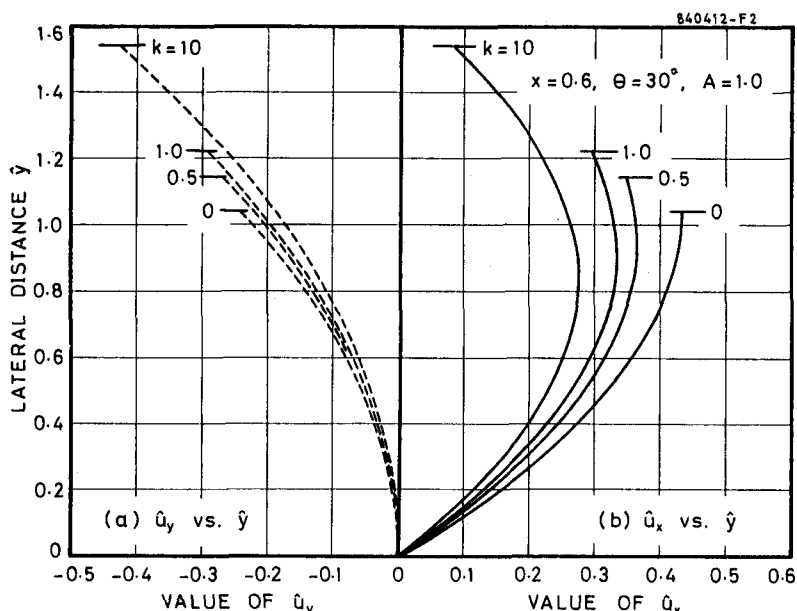


FIG. 2.-EFFECT OF  $k$  ON VELOCITY PROFILES