

京都大学

正会員 住友 恒

同 (理・新田鉄KK)

川人健二

同

橋本一男

1. はじめに : 水道が広域化の時代を迎え、広域化の効果を技術的に定量化してゆく必要性が高まっている。その一環として連絡管の効果や広域調整池の効果を検討するため、広域都市域の複雑な管網データを極力詳細に入力した上でこれらのデータを活かし広域管網を解く必要がある。¹⁾ 筆者らはすでにいくつかの検討を加えてきたが、本文ではこれらのうち、数値解法の安定条件に関する検討結果を要約し、得られた結果の一例を示すことによって本解法の実用性効果を定性的に示すことを目的としている。

2. 広域管網の2次元数値解法 ^{2), 3), 4), 5)}

対象域を格子区分し、それぞれにおける実際の管種管径別管網データを用いて何らかの型でそれぞれの格子を一本の仮想管で結ぶモデル化を行う。ここでは格子間の流れは一般の2次元流と同様にたとえは式で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{gA_x} \frac{\partial Q_x}{\partial t} &= -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{f_x}{A_x} |Q_x| Q_x \\ \frac{1}{gA_y} \frac{\partial Q_y}{\partial t} &= -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{f_y}{A_y} |Q_y| Q_y \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot \Delta y &= Q_s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$f_x = 3 \sqrt{\frac{\pi^2 \epsilon^3}{A_x^3}} \cdot n^2 \cdot \Delta x$$

$$f_y = 3 \sqrt{\frac{\pi^2 \epsilon^3}{A_y^3}} \cdot n^2 \cdot \Delta y$$

ただし、 h は水頭、 $\Delta x, \Delta y$ は格子間隔、 Q_s は格子内での流出量(流入正)、 A_x, A_y は x, y 方向の仮想管断面積、上式に f_x, f_y は抵抗係数でManning式を用いた場合。これらの式を数値解法として解く。

3. 数値解法の安定条件

格子を添字 i, j 、時間ステップ n を n で表示した上で式(1)を差分表示し、厳密解 Q_x^n, Q_y^n, h^n とそれらの誤差量 $\delta Q_x, \delta Q_y, \delta h$ で、 $Q_x = Q_x^n + \delta Q_x, Q_y = Q_y^n + \delta Q_y, h = h^n + \delta h$ と2差分式に代入する。誤差の満たすべき式として式(2)を得る。なお、式(1)の右辺式に ϵ の3乗項として、 $\tilde{A} \frac{\partial h}{\partial t}$ 項を付加する。すなわち、 $\frac{\partial h}{\partial t}$ が限りなく0に近づくとき解を得る構造とする。また、一つの方法として、 $\tilde{A} = \alpha / \tilde{A}_{ij}$ ($\tilde{A}_{ij}$ は各格子での四方向の仮想管の全断面積和)を採用する。ただし α はイレーションのための係数で、この α をいかなる定数とする必要があるかは具体的な問題とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{gA_{ix}} \cdot \frac{\delta Q_{ix}^n - \delta Q_{ix}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\delta h_{i,j+1}^n - \delta h_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{f_{ix}}{\Delta x} \{ \delta Q_{ix}^n (|Q_{ix}^n| + |Q_{ix}^{n-1}|) \} &= 0 \\ \frac{1}{gA_{iy}} \cdot \frac{\delta Q_{iy}^n - \delta Q_{iy}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\delta h_{i+1,j}^n - \delta h_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{f_{iy}}{\Delta y} \{ \delta Q_{iy}^n (|Q_{iy}^n| + |Q_{iy}^{n-1}|) \} &= 0 \\ \frac{\delta h_{i,j+1}^n - \delta h_{i,j}^n}{\Delta t} = (\alpha / \tilde{A}_{ij}) \{ \delta Q_{i,j+1}^n - \delta Q_{i,j}^n + \delta Q_{i,j-1}^n - \delta Q_{i,j+1}^{n-1} \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)の第1, 第2式の右辺の括弧内非線形性を $(|Q_{ix}^n| + |Q_{ix}^{n-1}|)$ を各ステップで定数扱いとする近似法で、Von Neumannの方法⁶⁾で検討する。すなわち、誤差を7-11級数表示により $\delta Q_{ix}^n = \bar{Q}_x e^{i(\alpha_x i \Delta x + \alpha_y j \Delta y + \beta n \Delta t)}$, $\delta Q_{iy}^n = \bar{Q}_y e^{i(\alpha_x i \Delta x + \alpha_y j \Delta y + \beta n \Delta t)}$, $\delta h_{i,j}^n = \bar{h} e^{i(\alpha_x i \Delta x + \alpha_y j \Delta y + \beta n \Delta t)}$ (ただし、 $I = \sqrt{-1}$)、と表現する。これらの値を式(2)に代入し、 $Z = e^{i\beta \Delta t}$ (Amplification Factor), $\xi_x = \alpha_x \Delta x$, $\xi_y = \alpha_y \Delta y$, $4 \sin^2(\xi/2) = e^{i\xi} + e^{-i\xi}$ と表現しつつ $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{h}$ に関する連立方程式を得る。 $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{h}$ はそれぞれ0でなく仮定して $\bar{Q}_x$ について解くと Z は3次の式を満足する。

$$P_1 Z^3 + P_2 Z^2 + P_3 Z + P_4 = 0 \quad (3)$$

ただし、 $P_1 = F_x \cdot F_y$, $P_2 = -\{F_x F_y + F_x (A_y - B_y \sin^2(\xi/2)) + F_y (A_x - B_x \sin^2(\xi/2))\}$, $P_3 = F_x A_y + F_y A_x + 2\alpha A_x - B_y A_x$

$$\sin^2(\beta/2) - B_x a_y \sin^2(\beta/2), \quad F_k = -a_x \cdot a_y, \quad F_x = a_x + C_x, \quad F_y = a_y + C_y, \quad B_x = 4H_x (\alpha/\hat{A}_{ij}), \quad B_y = 4H_y (\alpha/\hat{A}_{ij}),$$

$$a_x = 1/8 A_{ij} x, \quad a_y = 1/8 A_{ij} y, \quad C_x = r_{ijx} \lambda_x \{ |Q_{ijx}| + Q_{ijx}^2 \}, \quad C_y = r_{ijy} \lambda_y \{ |Q_{ijy}| + Q_{ijy}^2 \}, \quad \mu_x = (at)^2 / \Delta x,$$

$$\mu_y = (at)^2 / \Delta y, \quad \lambda_x = \Delta t / \Delta x, \quad \lambda_y = \Delta t / \Delta y$$

證るが時間とともに成長しないものの条件 $|Z| = |e^{i\beta at}| \leq 1$ を特別な条件下, $\mu_x = \mu_y = \mu$, $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ とし,
 (i) $\beta_x = \beta_y = 0$ のとき, (ii) $\beta_x = \beta_y = \pi$ のとき, (iii) $\beta_x = 0, \beta_y = \pi$ のとき, (iv) $\beta_x = \pi, \beta_y = 0$ のとき, の4ケースについて検討する。以上に通ずる条件として α についてつぎの必要条件式を得る。

$$0 < \alpha < \frac{1}{2g} \frac{\hat{A}_{ij}}{A_{ijx}} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta t)^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} g A_{ijx} r_{ijx} \lambda \{ |Q_{ijx}| + Q_{ijx}^2 \} + \sqrt{1 + g A_{ijx} r_{ijx} \lambda \{ |Q_{ijx}| + Q_{ijx}^2 \}} \right] \quad (4)$$

計算値として $\Delta t = 1 \text{ sec}$, $\Delta x = \Delta y = 500 \text{ m}$, $\hat{A}_{ij} = A_{ijx} = A_{ijy}$ とし α の値を求めると, $0 < \alpha < 51$ を得る。

4. 大阪府下全域の管網計算例

大阪府下は府営水道による幹線供給とこれを受水する各市町村の給水という二重の構造となっていると3章, 4章で別々に2次元化し両者を所定の地点で連結する二重構造の2次元モデルで逐次計算した。その詳細は別章の会にゆかり, 結果の計算値は図-1から図-3である。こゝでの α 値については幹線モデルで3, 給水モデルで5を採用した。結果の精度を検証する目的で府営水道幹線ルートでの実測水圧と計算値を対比したのが図-4である。

図-1.
大阪府下での管
内流のバブル
表示
(計算値)

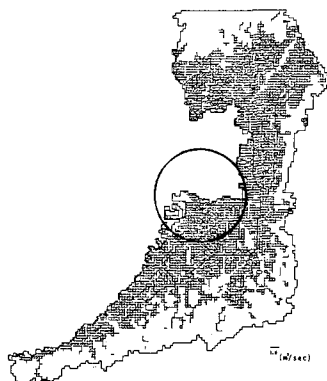


図-2.
大阪府下全域
の拡大図

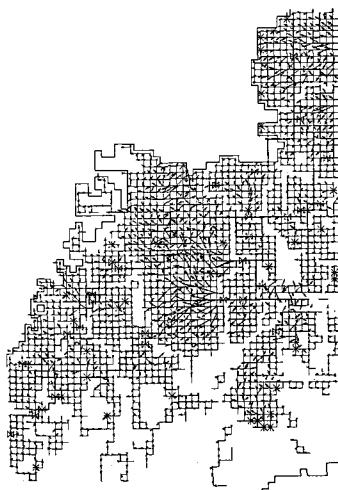


図-3.
大阪府下での
管内水圧
(計算値)

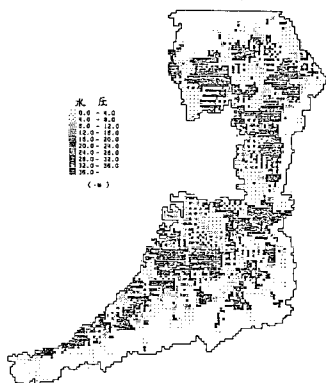
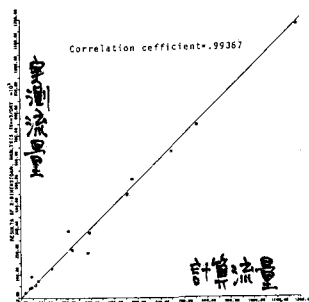


図-4.
府営水道幹線
での実測値と
計算値の流量
対比



参考文献

- 1) 佐藤: 面的評価に基づく都市配水計画に関する研究, 京大工学論文, 昭58.4, 2) 佐藤: 大阪府下全域管網水圧の二次解析法の可能性, 水道協会誌, 58.9, 昭58.10, 3) 川口: 大阪管網水圧の二次解析法, 京大工学論文, 昭59.3, 4) 橋本: 大阪府下水管網の面的解析法, 京大工学論文, 昭59.3, 5) 佐藤: 大阪管網水圧の二次解析法とその検証, 水道協会誌, (投稿中), 6) 野村: 港合システム安定性, 土木学会誌, 1966, 昭60