

日立造船(株) 正員 柴田 弘
神戸大学工学部 正員 松梨 順三郎

1. まえがき

差分法による流れの計算は、従来、MAC法や温度・流れ関数方程式系の解法などが広く用いられている。本研究は、基礎方程式を完全陰解法によって差分近似し、大次元の連立方程式を解くことによって流れを計算する手法をとった。この手法を2次元最終沈殿池の非定常の流れの解析に適用した。又、差分化を行なうにあたって特に問題となる対流項には、ドナーセル法を用いた。

2. 適用領域と差分メッシュ

本研究では、図-1のように沈殿池のモデルを設定した。これに対応する差分メッシュシステムは図-2に示すような構造とする。ここでは $\Delta x = 2.5 \text{ cm}$, $\Delta y = 2.0 \text{ cm}$ とした。図-2の格子点において流速 u , v を求め、セル中央と領域外の・印点において、圧力 P を求めることとする。領域外の・点に圧力を与えたのは、圧力の境界条件を計算に組み込むためである。

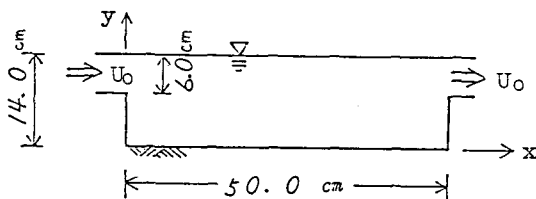


図-1 沈殿池型モデル

基礎方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{---(1)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -g - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{---(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad * \phi: \text{圧力密度比 } P/\rho \quad (\rho = \text{const}), \quad g: \text{重力加速度}, \quad \nu: \text{動粘性係数}$$

これを本研究では次のように差分化する。

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_R u_R^n - \bar{u}_L u_L^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_R u_R^n - \bar{v}_S u_S^{n+1}}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n+1}) - \frac{1}{2}(\phi_{i,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n+1}) \right\} + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \quad \text{---(4)}$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_R v_R^n - \bar{u}_L v_L^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_R v_R^n - \bar{v}_S v_S^{n+1}}{\Delta y} = -g - \frac{1}{\Delta y} \left\{ \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^{n+1}) - \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n+1}) \right\} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \quad \text{---(5)}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_R &= (u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j}^n) / 2 \\ \bar{u}_L &= (u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^{n+1}) / 2 \\ \bar{v}_R &= (v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^n) / 2 \end{aligned} \right\}$$

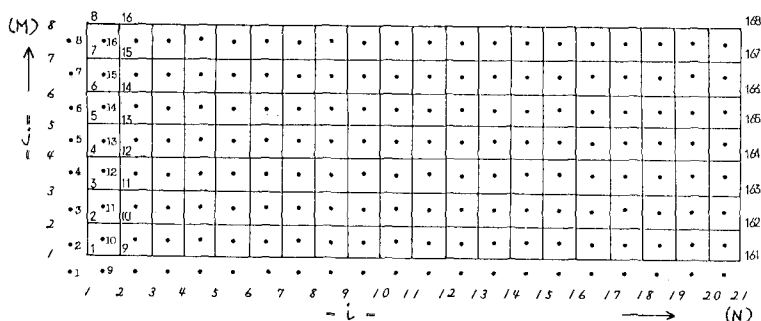


図-2 メッシュシステム

$\bar{v}_B = (v_{i,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1})/2$] --- (6) とし、さらにつぎのように設定する。

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{u}_R > 0 \text{ の時, } u_R^n = u_{i,j}^{n+1} \cdot v_R^n = v_{i+1,j}^{n+1}, & \text{逆に } \bar{u}_R < 0 \text{ の時, } u_R^n = u_{i+1,j}^{n+1} \cdot v_R^n = v_{i,j}^{n+1} \\ \bar{u}_L > 0 \text{ の時, } u_L^n = u_{i,j}^{n+1} \cdot v_L^n = v_{i,j-1}^{n+1}, & \bar{u}_L < 0 \text{ の時, } u_L^n = u_{i,j}^{n+1} \cdot v_L^n = v_{i,j}^{n+1} \\ \bar{u}_B > 0 \text{ の時, } u_B^n = u_{i,j}^{n+1} \cdot v_B^n = v_{i,j+1}^{n+1}, & \bar{u}_B < 0 \text{ の時, } u_B^n = u_{i,j+1}^{n+1} \cdot v_B^n = v_{i,j}^{n+1} \end{array} \right\} \text{----- (7)} \quad (\text{ドナーセル法})$$

連続の式、(3)式の差分は次のようにする。

$$\frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2}(u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2}(u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n) \right\} + \frac{1}{\Delta y} \left\{ \frac{1}{2}(v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2}(v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n) \right\} = 0 \quad \text{----- (8)}$$

(4)式、(5)式を図-2の領域内の格子点でたて、(8)式を各セルに適用して、368元の連立方程式を構成する。

既知の u^n, v^n から、この連立方程式を解いて、 $u^{n+1}, v^{n+1}, \phi^{n+1}$ を一挙に求めるわけである。

3. 境界条件、初期条件

図-1の流入口、流出口において、 $U_0 = 0.81 \text{ cm/s}$, $v = 0$, 水面では $\partial u / \partial y = 0$, $v = 0$ とした。

また、壁面では、 $u = v = 0$ とする。

初期条件は、領域内において、 u, v 共に0とした。

4. 計算結果と考察

計算の結果、得られた流速ベクトルを図-3に示す。段差による渦の発達が明瞭に描かれており、極めて良好な結果であると考ええる。

本手法は、非定常状態においても連続の条件が厳密に適用される。従って、MAC法のように非定常状態において連続の条件が厳密でなかったり、あるいは、連続の条件を満たすために特別な工夫を要するというようなことはない。

また、本手法は計算の安定性にも優れている。大次元の連立方程式を解く必要があるという制約があるが、2次元の流水のシミュレーションに対しては、十分、有効な手法であるといえる。

参考文献

P. J. Roache 著, 高橋亮一訳,
コンピューターによる流体力学, (上)
(下), 構造計画研究所, 昭和53年

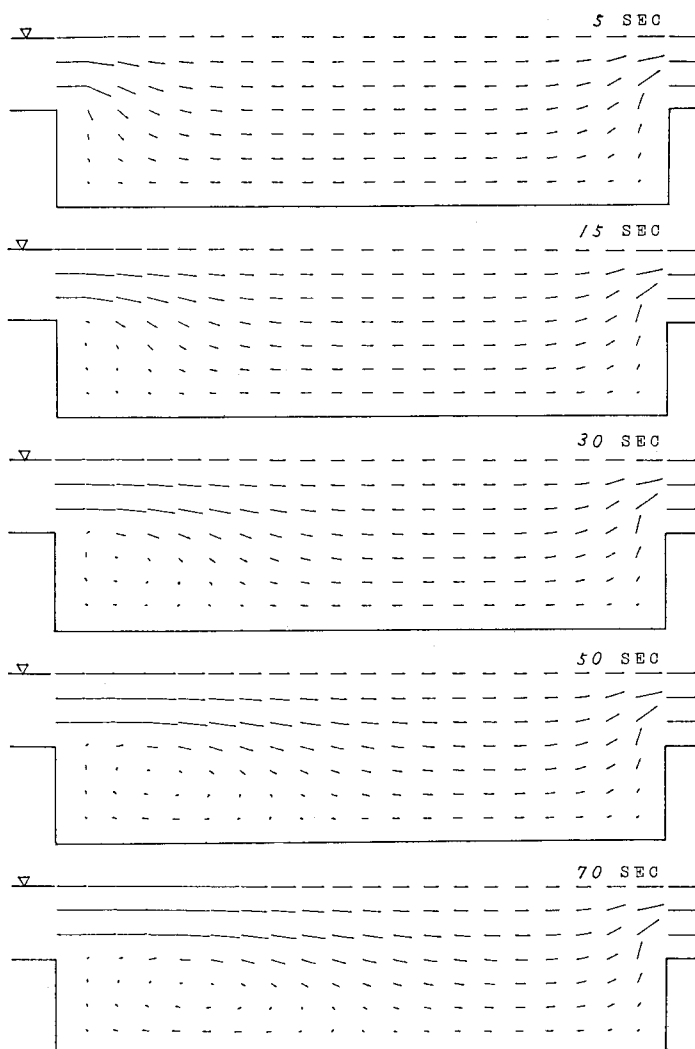


図-3 流速ベクトル

→ 1.0 cm/s