

広島大学工学部 正員 常松秀昭
島取県 田中俊一

1. まえがき 水輸送の手段として用いられる分岐管路系の過渡水理解析法には、水の圧縮性を考慮に入れた弾性モデルによる解析法と水を非圧縮性流体と仮定する剛性モデルによる解析法とがある。後者の利点には、系の状態方程式が常微分方程式系で記述されるため電子計算機の使用にあたり計算時間を短くできること、管路システム全般の安定性を論じる場合にシステム制御の理論が適用できることなどがあげられる。しかし、緩慢な過渡水理現象に対する剛性モデルの適用範囲などについては不明な点が多い。そこで、本報告は、弾性モデルによる解析法に特性曲線法を適用して得られる数値計算結果と剛性モデルに基づくそれとを比較・検討し、剛性モデルの得失と適用性について考察したものである。

2. 剛性モデル ここで対象とした系は、基本的には一個の貯水槽と m 個の末端調圧水槽とから成る途中の分岐部で流出流量のない樹枝状に分岐した管路系である。この管路系に対して非圧縮性流れのエネルギー式と連続式を適用し、さらにグラフ理論を用いれば、末端管路流量 $Q_{T2}(m)$ と末端調圧水槽エネルギー位置 $z_3(m)$ を未知量として、系の状態方程式は行列とベクトルを用いて次のように定式化される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_{T2}(m) &= -L_{(m,m)}^{-1} H_{c1}(m) - L_{(m,m)}^{-1} K_{(m,m)} \cdot Q_{T2}(m) \\ \dot{z}_3(m) &= S_{(m,m)}^{-1} Q_{T2}(m) - S_{(m,m)}^{-1} C_{(m,m)} \cdot f(z_3(m)) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $L_{(m,m)} = \frac{\rho l}{2gA}$ (A : 管路断面積, l : 管路長) に関する対角行列, $K_{(m,m)}$: 管路抵抗に関する対角行列, $S_{(m,m)}$: 末端調圧水槽断面積を表す対角行列, $C_{(m,m)}$: 流出係数を表す対角行列, $f(z_3(m))$: 末端からの取り出し流量を表す関数, $H_{c1}(m)$: ソースノードとシンクノードのエネルギー位の差を表す列ベクトルである。

3. 弾性モデル 弾性モデルは次のような運動方程式と連続方程式とにより構成される。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{2} V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{f}{2gD} V \cdot |V| = 0 \quad \dots (2) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \right) = 0 \quad \dots (3)$$

ここに、 H : ピエゾ水頭, V : 速度, f : Darcy-Weisbach の摩擦損失係数, D : 管路径, C : 圧力波伝播速度, α : 管軸の傾き, t : 時間, x : 距離である。式(2), (3)の特性方程式の差分表示としては、管路断面積は一定とし、 $Q=VA$ の関係が成り立つものと仮定して、次のものを用いる。

$$C^+ \left\{ \begin{aligned} (x_P - x_R) &= (V_R + C_R) \cdot (t_P - t_R) \\ (H_P - H_R) + \frac{C_R}{gA} (Q_P - Q_R) - \frac{Q_R \cdot (t_P - t_R)}{A} \sin \alpha + \frac{f \cdot C_R}{2gDA^2} Q_R \cdot |Q_R| (t_P - t_R) &= 0 \end{aligned} \right. \quad \dots (4)$$

$$\dots (5)$$

$$C^- \left\{ \begin{aligned} (x_P - x_S) &= (V_S - C_S) \cdot (t_P - t_S) \\ (H_P - H_S) - \frac{C_S}{gA} (Q_P - Q_S) - \frac{Q_S \cdot (t_P - t_S)}{A} \sin \alpha + \frac{f \cdot C_S}{2gDA^2} Q_S \cdot |Q_S| (t_P - t_S) &= 0 \end{aligned} \right. \quad \dots (6)$$

$$\dots (7)$$

ここに、添字 R, S は固定時間間隔の差分格子点において時刻 t での既知量に関する点を、また P は時刻 $t + \Delta t$ での未知量に関する点を示している。また、(4), (6) 式は特性曲線を示し、(5), (7) 式はそれぞれの特性曲線上で成り立つ特性方程式を表わしている。

4. 数値計算例 剛性モデルと弾性モデルの両者をモデル・ケースの解析に適用し、数値計算した結果について述べる。なお、式(1)の数値解法には、Runge-kutta-Gill法を用いた。簡単のため図-1に示すような三分岐管路系を対象としたが、その諸元は表-1のようである。以下の計算では、最上流端にある貯水池の水位を一定とし、損失水頭には摩擦損失だけを考慮した。また系からの取り出し流量はバルブにより制御され、オリフィス型の流量式にしたがうものとした。バルブの開度操作にはバルブ④を初期開度から最終開度まで直線的に変化する方式を用いた。図-2, 3は、初期開度 $0.003(m)$ から最終開度 $0.03(m)$ まで、90%のバルブ開操作を行った場合の末端管路の流量 Q_2, Q_3 の変化を示したものである。これとは全く逆の開操作した場合の Q_2, Q_3 は図-4, 5のよ

うである（図中凡例の赤字F, Lはそれぞれ初期、最終バルブ開度に対応する定常値を示す）。これらの図より、流量の変動性状に関しては、剛性モデルは弾性モデルによる結果のほぼ平均的値を示し単調な変動を呈すること、また、両者の差異は開操作の場合には開操作ほど大きくないことがわかる。

次に、図-6、7は前述の開操作の場合の末端水槽③、バルブ④におけるエネルギー位 $\bar{z}_3, \bar{z}_4$ の時間変化を示したものである。バルブ操作地点④では剛性モデルと弾性モデルによるエネルギー位の結果にかなりの差異が生じていることがわかる。そこで、初期と最終のバルブ開度は同じという条件で操作時間(T_c)を変えて計算を行った。エネルギー位の結果に最も大きな差が生じるバルブ操作地点の $\bar{z}_4$ の最大値の差異を示せば図-8のようである。これよりエネルギー位の面からみると、あるバルブ開度の時間的変化率を境として剛性モデルが弾性モデルと大きくかき離することがうかがわれる。

ところで、剛性モデルと弾性モデルによる計算時間を比較すると、簡単な三分岐管路系でも前者は後者の約2/3程度（HITAC M-200H使用）であり、この点で剛性モデルの有利なことがうかがわれる。

5. あとがき 剛性モデルによる流量計算結果は、弾性モデルによる結果と比較して、エネルギー位ほどには差異は小さくなく、計算時間も少なくて済むので、流量シミュレーションという点では剛性モデルはそれなりに利点を有すると思われる。しかし、剛性モデルの有用性を定量的に明らかにするためには、今後さらに多くのケースについて数値計算することにより、剛性モデルの過渡水理現象に対する適用限界等について詳しく検討する必要がある。

参考文献 山本孝昭：管路系における非定常流れの解析法について(1), 土木学会中部支部年講, 1977. 2), 3) Wylie, E. B. and Streeter, V. L.: Fluid Transients, McGraw-Hill, 1978.

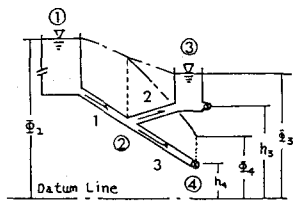


図-1 三分岐管路系

表-1 系の諸元

branch No.	1	2	3
pipe length(km)	10	2	4
pipe diameter(m)	1.0	0.6	0.5
node No.	3	4	
cross-sectional area of surge-tank(m ²)	10	0	
elevation of orifice(m)	30	5	

$\bar{z}_1=70(\text{m})$ $f=0.03$ $c=0.62$

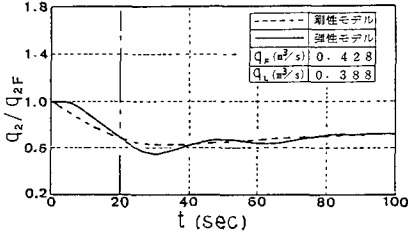


図-2 Q_2 の変動 (開操作)

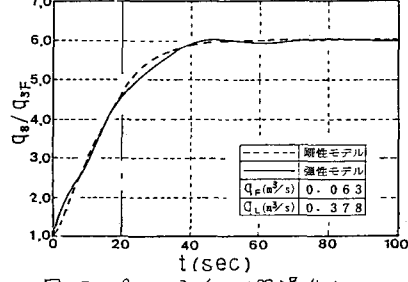


図-3 Q_3 の変動 (開操作)

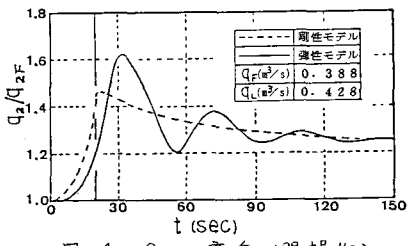


図-4 Q_2 の変動 (開操作)

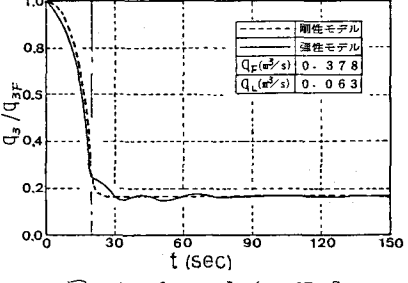


図-5 Q_3 の変動 (開操作)

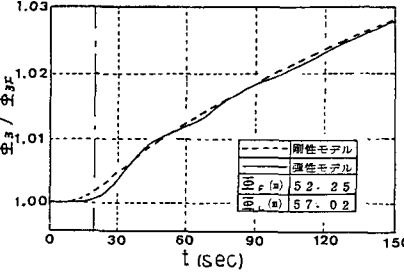


図-6 $\bar{z}_3$ の変動 (開操作)

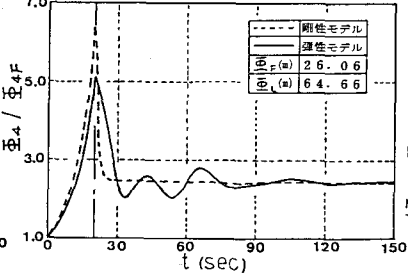


図-7 $\bar{z}_4$ の変動 (開操作)

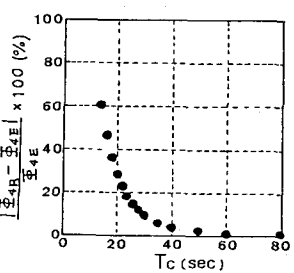


図-8 T_c と最大エネルギー位の関係