

福井工大。正員 和田 久 範
 福井工大 正員 吉田 豊穂
 福井大学工学部 三井 斌 友

1. はじめに

管網計算の歴史は古く1936年にハーデイクロス法が発表されてより、今日まで多くの改良が加えられてきた。電算機の時代になると大規模管網の計算も容易になり、管理設計の分野にまで研究がすすんでいる。しかし管網計算は非線形連立方程式を解くことになるので、その解法にはなお困難な問題が残されていることも事実である。この連立方程式の解法には、ニュートン法のように線形計算とするものと、2次方程式とする厳密計算法によるものが用いられるが、何れの場合も広い収束性が要求される。この問題について筆者らは一松法を厳密計算に適用し、極めてよい結果を得たのでここに報告する。

2. 非線形方程式の解法

まずニュートン法では $f(x)$ を x_i の近傍でテイラー展開すると $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)(x-x_i)^2 + \dots$ この式の1次微分項までを取って近似する。補正值 $\Delta x_i = -f(x_i)/f'(x_i)$ 反復計算式 $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$

次にテイラー展開式の2次微分項までを取って近似する方法に一松法がある。一松法はテイラー展開式において $x - x_i = \Delta x$ $f(x_i) = f$, $f'(x_i) = f'$, $f''(x_i) = f''$ とし、 $f + f'\Delta x + \frac{1}{2}f''\Delta x^2 = 0$ の根を求める。

$$\Delta x = \frac{f' \pm \sqrt{f'^2 - 2ff''}}{f''}, \text{ 分子を有理化して } f'^2 - 2ff'' = D \text{ とおけば } \Delta x = \frac{2f}{f' \pm \sqrt{D}} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} D > 0 \text{ かつ } f' \geq 0 \text{ のとき } \Delta x &= \frac{2f}{f' + \sqrt{D}} \quad (a) \\ D > 0 \text{ かつ } f' < 0 \text{ のとき } \Delta x &= \frac{2f}{f' - \sqrt{D}} \quad (b) \\ D \leq 0 \text{ のとき } \Delta x &= \frac{-f'}{f''} \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{反復計算式 } \Delta x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$$

これらの手法を多変数の連立方程式に拡張すると、ニュートン法では $f_i(x)$ が C^2 級で $J(x)$ が正則なら、 $f(x) = 0$ の解 x の近くより出発する計算は

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ とし、反復計算は } x_{i+1} = x_i - [J(x_i)]^{-1} f(x_i) \text{ となる。}$$

次に一松法を連立方程式に拡張する場合、2次微分項、すなわちヘッシアンが現れることになり、その扱いは非常に複雑になる。そこで(2)式に注目して、ニュートン法の反復行列に2次微分項からの情報を一部とり入れて修正し、これを新たな反復行列とする簡易法が考えられる。この場合のヤコビ行列を $J(x)$ で表わし、 (i, j) の成分を $g_{ij} = \{\partial f_i / \partial x_j \pm \sqrt{P_{ij}}\} / 2$, $P_{ij} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})^2 - 2f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}$ とする。この手法は(a)式と(b)式に適用できる。(c)式についても同様の手法を行ってみたが、実験の結果精度の低下する現象が生じた。これは(c)式が $D=0$ のとき $f = f'^2 / 2f''$ となり、これを(1)式に代入すると $-f'/f''$ となって(c)式に一致することから、連立方程式への拡張は $P_{ij}=0$ のときにのみ適用するのがよいと判断されるからである。 $P_{ij} < 0$ のときは、ニュートン法、ペイリー法などでよいが、ここでは $P_{ij} \leq 0$ の場合、ニュートン法を用いて反復行列をつくる。

$$\left. \begin{aligned} P_{ij} > 0 \text{ かつ } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \text{ のとき } g_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sqrt{P_{ij}} \right) \\ P_{ij} > 0 \text{ かつ } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \text{ のとき } g_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sqrt{P_{ij}} \right) \\ P_{ij} \leq 0 \text{ のとき } g_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{反復計算式 } x_{i+1} = x_i - [J(x_i)]^{-1} f(x_i)$$

(3)式では一松法とニュートン法は相補う関係になる。単独方程式ではニュートン法の収束条件は $ff'' > 0$ であるが、一松法で $D < 0$ となるのは $ff'' > 0$ のときであり、またニュートン法で $f' = 0$, $ff'' < 0$ のときは収束しないので一松法がよいことから、連立方程式の場合も、これらの点を考慮した(3)式が有効であると考えられる。

3. 実施例

一松法とニュートン法による計算法を検討するため、第1図に示す配水管網の計算を行う。この管網は福井市上水道の1つのブロックで、適用公式はヘーゼンウィリアムズ式とマニング式とする。

(1) 損失水頭

$$h = \gamma Q^m \quad \text{これに流量方向を規定して } h = \gamma Q |Q|^{m-1}$$

(イ) ヘーゼンウィリアムズ式

$$\gamma = 10.666 C_H^{-1.85} D^{-4.85}$$

C_H : 流量係数 (130とする)

$$m = 1.85$$

D : 管径

(ロ) マニング式

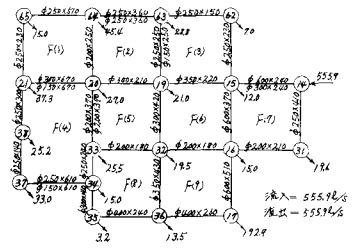
$$\gamma = 10.249 n^2 l / \alpha^4$$

n : 粗度係数 (0.012とする)

l : 管路長

$$m = 2$$

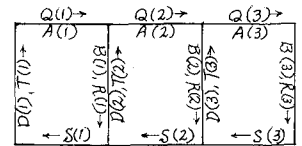
α : 管径



図(1) 配水管網図

(2) 管路の流量表示と未知数の選定

計算を簡単にするため、図(2)のように記号を統一し、要素閉回路毎に右廻りを(+)にとる。次に各閉回路から未知数を1個選べ、未知数の個数と方程式の数は一致する。この計算では $Q(i)$ を未知数としたので、 $R(i)$ 、 $S(i)$ 、 $T(i)$ はすべて $Q(i)$ の関数として表わされる。



Q, R, S, T : 流量 A, B, C, D : γ 値

図(2) 管路記号

(3) 閉回路方程式とその解

閉回路方程式は

$$F(i) = A(i)Q(i)|Q(i)|^{m-1} + B(i)R(i)|R(i)|^{m-1} + C(i)S(i)|S(i)|^{m-1} + D(i)T(i)|T(i)|^{m-1} + E(i)U(i)|U(i)|^{m-1} + G(i)W(i)|W(i)|^{m-1}$$

として表示すると表(1)になる。この方程式を解く一松法は表(2)となり、解は表(3)になる。計算の結果は一松法による解とニュートン法による解は同じになったが、一松法の方が広い収束性を示したことが注目される。

ヘーゼンウィリアムズ式 初期値 (m/s)	反復回数 一松法	マニング式 初期値 (m/s)	反復回数 一松法
(1) 現行の配水量	5	(1) 現行の配水量	5
(2) すべての $Q(i) = -0.05$	5	(2) $Q(7) = -0.5$ その他の $Q(i) = -0.05$	5
(3) すべての $Q(i) = -0.1$	5	(3) $Q(7) = -0.5$ その他の $Q(i) = -0.1$	6
(4) すべての $Q(i) = 0.05$	7	(4) $Q(7) = -0.5$ その他の $Q(i) = 0.05$	7
(5) すべての $Q(i) = 0.1$	7	(5) $Q(7) = -0.5$ その他の $Q(i) = 0.1$	14

4. まとめ

- (1) この管網計算では、従来の手法を簡易化するため、新しい記号を用い、機能的に処理する方法を提案した。このプログラムに節点エネルギー位のプログラムを追加して、設計上の諸データを求めることもできる。
- (2) 管網計算に一松法を適用した結果が非常によかった。これはニュートン法の過剰補正が修正されるからである。この計算では精度はよく、ニュートン法における広域的収束性の問題解決にも一歩の前進があったと思う。

表(1) 方程式

```

2140 FOR J=1 TO 3
2150 FOR J=1 TO 9 IF X(1,J)=0 THEN 2210
2160 P(1,J)=X(1,J)/2+2*(X(1,J)-X(1,J))/2
2170 IF P(1,J)=0 THEN IF X(1,J)=0 THEN 2210
2180 IF P(1,J)=0 THEN IF X(1,J)=0 THEN 2210
2190 ELSE 2210
2200 X(1,J)=X(1,J)/2+SOR(P(1,J))/2
2210 X(1,J)=X(1,J)/2+SOR(P(1,J))/2
2220 PRINT "d=";P(1,J);GOTO 2210
2230 X(1,J)=X(1,J)/2+SOR(P(1,J))/2
2240 PRINT "d=";P(1,J);GOTO 2210
2250 X(1,J)=X(1,J)/2+SOR(P(1,J))/2
2260 PRINT "d=";P(1,J);GOTO 2210
2270 NEXT J
2280 NEXT J

```

表(2) 一松法

管径	ヘーゼンウィリアムズ式	マニング式	管径	ヘーゼンウィリアムズ式	マニング式
Q(1)	-0.021031	-0.021031	Q(4)	-0.150178	-0.151217
Q(2)	-0.051001	-0.051001	Q(7)	-0.511217	-0.512317
Q(3)	-0.051012	-0.051012	Q(8)	-0.021511	-0.021612
Q(10)	-0.045019	-0.045019	Q(9)	-0.031761	-0.031812
Q(13)	-0.010444	-0.011245			

表(3) 方程式の解

(1) 一松法、森田繁一・山内二郎：電子計算機のための数値計算法1(培風館)一松法：2次の近似式について 第3回プログラムシンポジウム報告集 (2) 非線型連立方程式による管網計算のマコン利用について 第7回電算機利用に関するシンポジウム報告集、マイコンによる管網計算の厳密解について、第39回年次学術講演会発表集第2部 (3) 青木康夫：管網計算の連立2次方程式による厳密解法 水道協会雑誌 第350号 (4) 高桑哲夫：配水管網の解析と設計(南北出版) (5) 綾田日出：配水施設のシミュレーション 水道協会雑誌 第559号