

II-342 二次元移流分散方程式のADI法による高精度差分方程式解

九州産業大学 正会員○加納正道

東 和 大 学 正会員 空閑幸雄

九州産業大学 正会員 赤坂順三

1・まえがき 前報¹⁾において、我々は一次元移流分散方程式を空間分割幅(Δx)の四乗程度の精度で数値解析する方法を提案した。ここでは、非同次型の定数係数二次元移流分散方程式を、ADI法的考え方によって、一次元移流分散方程式の解法を二回使用して解析した結果 $\bar{O}(\Delta S^4)$ の精度を得た。また、前報では、時間分割幅(Δt)を ΔS^2 程度にとるために $\bar{O}(\Delta S^4)$ と $\bar{O}(\Delta t^2)$ とが等しくなり解析の基本近似解から t^3 以上の項は省いていた。しかし、本報では流速(V)が大きい場合には $V^3(\Delta t)^3$ あるいは $V^4(\Delta t)^4$ が $\bar{O}(\Delta S^4)$ と等しくなり、 t^3 と t^4 の項を基本近似解に含める方がより妥当であると考えた。そして、 t^3 と t^4 まで含めた一次元の解析においてより広い流速と分散係数の範囲で $\bar{O}(\Delta S^4)$ の精度の解析を行なうことができた。

2・高精度差分方程式解法 二次元場における移流分散現象を解くためには式(1)を数値解析する方法がある。本報では、式(1)を解くにあたって ADI 法的解法を考える。即ち、一次元移流分散方程式(2)の高精度差分方程式解法を二回使用して、式(1)の高精度差分方程式解を求める。ここに、我々の解法を略記しよう。式(1)の基本近似解として、 x の0次,1次,2次, $\frac{\partial C}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V_1 \frac{\partial C}{\partial x} - V_2 \frac{\partial C}{\partial y}$ (1)
3次,4次までの多項式を考えれば式(3)のように求めることができる。つぎに、 $\bar{O}(\Delta S^4)$ の精度で高精度差分方程式を求める $\frac{\partial C}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x}$ (2)

め、図-1.1,図-1.2,図-1.3に示す差分化モデルについて6点で差分をとり、式(3)の $C^{(0)}(x, t) \sim C^{(5)}(x, t)$ の五個を考え、差分式に五個の未定係数をもたせると、式(41), (42), (43)がえられる。ここで、式(41), (42), (43)が式(3)を満足するよううに作成した連立方程式(51) ~

$$\left. \begin{aligned} C^{(0)}(x, t) &= 1 \\ C^{(1)}(x, t) &= x - Vt \\ C^{(2)}(x, t) &= x^2 - 2(Vx - K)t + V^2 t^2 \\ C^{(3)}(x, t) &= x^3 - 3(Vx^2 - 2Kx)t + 3(V^2 x - 2KV)t^2 - V^3 t^3 \\ C^{(4)}(x, t) &= x^4 - 4(Vx^3 - 3Kx^2)t + 6(V^2 x^2 - 4KVx + 2K^2)t^2 - 4(V^3 x - 3KV^2)t^3 + V^4 t^4 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(53) を解けば、それぞれの差分

化モデルの場合の未定係数 $Q_1^i, \dots, P_1^i, \dots, R_1^i, \dots$ をえる

ことができる。但し、式(51) ~

(53) の中の $A_1 \sim F_4$ は式(6)

に示すとおりである。

図-1.1, 図-1.2, 図-1.3

●・・・既知点, ○・・・未知点, ⊙・・・求める点

$C(i, j) = Q_1^{-1} C(i-1, j) + Q_1^{-2} C(i-2, j) + Q_1^{-3} C(i-3, j) + Q_1^{-4} C(i-4, j) + Q_1^{-5} C(i-5, j) \dots (4.1)$

$C(i, j) = P_1^{-1} C(i-1, j-1) + P_1^{-2} C(i-2, j-1) + P_1^{-3} C(i-3, j-1) + P_1^{-4} C(i-4, j-1) + P_1^{-5} C(i-5, j-1) \dots (4.2)$

$C(i, j) = R_1^{-1} C(i-1, j+1) + R_1^{-2} C(i-2, j+1) + R_1^{-3} C(i-3, j+1) + R_1^{-4} C(i-4, j+1) + R_1^{-5} C(i-5, j+1) \dots (4.3)$

3・厳密解と高精度差分方程式解の比較 一次元移流分散

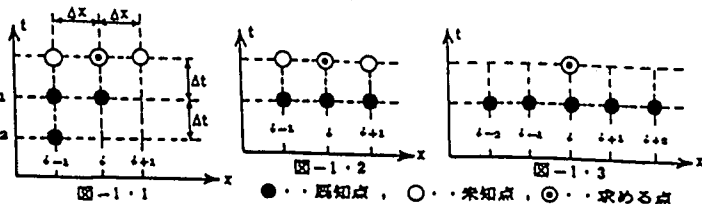
方程式の厳密解の一つは、前報に既述のとおり式(7)となる

$C(x, t) = \text{EXP}((-x + vt) / \sqrt{K}) \dots (7)$

また、二次元移流分散方程式の初期条件 $C(x, y, 0) = \text{EXP}((-x + V_1 t) / \sqrt{K_1} + (-y + V_2 t) / \sqrt{K_2})$, 境界条件 $C(x = V_1 \times t, y = V_2 t, t) = \text{EXP}(2t)$ を満足する解の一つは式(8)となる。

$C(x, y, t) = \text{EXP}((-x + V_1 t) / \sqrt{K_1} + (-y + V_2 t) / \sqrt{K_2} + 2t) \dots (8)$

ここでは、一次元と二次元の移流分散方程式について、



上流側差分型(図-11,式(41))、中央差分型(図-12,式(42))の高精度差分解と厳密解との相対誤差が $\bar{0}(\Delta S^4)$ を満足する無次元流速($F=V\Delta t/\Delta S$),無次元分散係数($\mu=K\Delta t/\Delta S^2$)の範囲を調べて、図-2、

図-3、図-4、図-5に示している。図-2、3の一次元のそれは、上流側差分型、中央差分型ともに $\bar{0}(\Delta S^4)$ の精度を満足する F, μ の範囲は t^4 項までを含む方が t^2 項までを含む場合よりもかなりひろい。また、図-4、5の二次元のそれは、x方向の流速(V_1)および分散係数(K_1)とy方向の流速(V_2)および分散係数(K_2)が等しい

$$\begin{aligned} A_1 &= -\alpha h + Vh^2 & B_1 &= Vh^2 \\ A_2 &= \alpha^2 h^2 - 2(V\alpha h - K)h^2 + V^2 h^4 & B_2 &= -2Kh^2 + V^2 h^4 \\ A_3 &= -\alpha^3 h^3 + 3(V\alpha^2 h^2 + 2K\alpha h)h^2 - 3(V^2\alpha h + 2KV)h^4 + V^3 h^6 & B_3 &= -6KVh^4 + V^3 h^6 \\ A_4 &= \alpha^4 h^4 - 4(V\alpha^3 h^3 - 3K\alpha^2 h^2)h^2 + 6(V^2\alpha^2 h^2 + 4KV\alpha h + 2K^2)h^4 & B_4 &= 2K^2 h^4 - 12KV^2 h^6 + V^4 h^8 \\ & - 4(V^3\alpha h - 3KV^2)h^6 + V^4 h^8 & E_1 &= -2\alpha h + Vh^2 \\ C_1 &= \alpha h + Vh^2 & E_2 &= 4\alpha^2 h^2 - 2(2V\alpha h - K)h^2 + V^2 h^4 \\ C_2 &= \alpha^2 h^2 + 2(V\alpha h - K)h^2 + V^2 h^4 & E_3 &= -8\alpha^3 h^3 + 12(V\alpha^2 h^2 + K\alpha h)h^2 - 6(V^2\alpha h + KV)h^4 + V^3 h^6 \\ C_3 &= \alpha^3 h^3 + 3(V\alpha^2 h^2 - 2K\alpha h)h^2 & E_4 &= 16\alpha^4 h^4 - 16(2V\alpha^3 h^3 - 3K\alpha^2 h^2)h^2 + 12(2V^2\alpha^2 h^2 \\ & + 3(V^2\alpha h - 2KV)h^4 + V^3 h^6 & & + 4KV\alpha h + K^2)h^4 - 4(2V^3\alpha h - 3KV^2)h^6 + V^4 h^8 \\ C_4 &= \alpha^4 h^4 + 4(V\alpha^3 h^3 - 3K\alpha^2 h^2)h^2 & F_1 &= 2\alpha h + Vh^2 \\ & + 6(V^2\alpha^2 h^2 - 4KV\alpha h + 2K^2)h^4 & F_2 &= 4\alpha^2 h^2 + 2(2V\alpha h - K)h^2 + V^2 h^4 \\ F_3 &= 8\alpha^3 h^3 + 12(V\alpha^2 h^2 - K\alpha h)h^2 + 6(V^2\alpha h - KV)h^4 + V^3 h^6 \\ F_4 &= 16\alpha^4 h^4 + 16(2V\alpha^3 h^3 - 3K\alpha^2 h^2)h^2 + 12(2V^2\alpha^2 h^2 - 4KV\alpha h + K^2)h^4 + 4(2V^3\alpha h - 3KV^2)h^6 + V^4 h^8 \end{aligned} \quad (6)$$

場合の方が異なる場合よりも広い F と μ の範囲で $\bar{0}(\Delta S^4)$ の精度で解析することができる。

