II-341　開領域における移流分散方程式の有限要素解析

京都大学大学院　学生員　米田　稔
京都大学工学部　正員　井上　頼輝

1. はじめに

従来、有限要素法を用いて開領域問題を解く場合は、十分大きな有限な大きさの解析領域を考え、仮想境界に、境界条件として、Dirichlet条件またはNeumann条件を与えることが多かった。しかし最近、無限遠まで続く要素（無限要素）を利用して、比較的簡単に無限遠での境界条件を考慮できる手法が開発され[1]、様々な分野で用いられ始めている。本研究では、有限要素法を用いて移流分散方程式に関する開領域問題を解く場合に、場を有限領域で近似することの妥当性、および無限要素を用いる方法の有効性について検討した。

2. 無限要素[1]

無限要素は有限要素の一辺を無限遠に移動したものであり、無限遠点における条件を満たすように重みづけした内挿関数を選ぶことによって、要素領域での積分が有限になるようにする。図1に本研究で用いた4節点2次元無限要素を示す。無限要素での内挿関数としては様々なものが提唱されているが、本研究では、η方向には1次のラグランジュ多項式、ξ方向には1次のラグランジュ多項式に指数減衰項を掛けた関数を用いた。つまり、

$$H_1=\frac{1}{2}(1-\eta)\ ,\ H_2=\frac{1}{2}(1+\eta)\ ,\ G_1=(1-\xi)e^{-\frac{\xi}{L}}\ ,\ G_2=\xi e^{-\frac{\xi-1}{L}} \tag{1}$$

とすると、内挿関数は、

$$N_1=H_1G_1\ ,\ N_2=H_1G_2\ ,\ N_3=H_2G_2\ ,\ N_4=H_2G_1 \tag{2}$$

で与えられる。ここにLは減衰長と呼ばれる定数である。

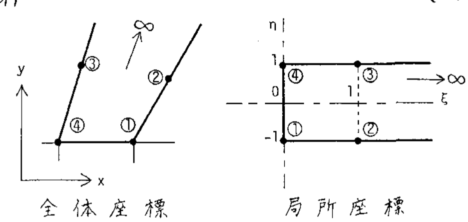

図1．4節点2次元無限要素

3. 基礎方程式と境界条件

次の2次元移流分散問題を考える。

基礎式：$$\frac{\partial C}{\partial t}-D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+v\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{1}{\theta}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{3}$$

初期条件：　$C=0$　at everywhere　(4)

境界条件：　$C=0$　at $x,y=$ infinity　(5)

ここに、Cは物質の溶液中濃度、D_x, D_yはそれぞれx, y方向の分散係数、vはx方向の流速、θは間隙率、$\delta(x)$はDiracのデルタ関数であり、点(x_0, y_0)に連続点汚染源を仮定している。

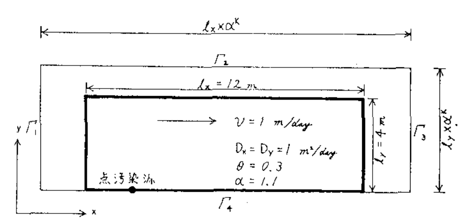

図2．解析領域と計算条件

4. 解析領域と計算条件および計算方法

解析領域と計算条件を図2に示す。今、図2の太線内の濃度分布を求めるため、図3に示すように領域を4節点四角形要素に分割し、太線の外部にも有限要素の層を何層か設定する（この層の数をKとする。）。そして(3)式をガラーキン法で定式化して、次の4種類の境界条件で解く。

B.C.1：$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$上で$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{n}}=0$　（$\boldsymbol{n}$は法線ベクトル）

B.C.2：$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$上で$C=0$，$\Gamma_4$上で$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{n}}=0$

B.C.3：Γ_1上で$C=0$，$\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$上で$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{n}}=0$

B.C.4：Γ_4上で$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{n}}=0$，$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$には無限要素を接続。

ただし、$K=m$の場合、B.C.1, 2, 3ではm層の外部有限要素層を設定し、B.C.4ではm-1層の外部有限要素層を設定

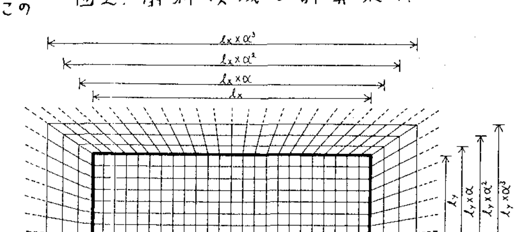

図3．有限要素分割（$K=3, \alpha=1.1$の場合の例．最外部層の要素はB.C.4では無限要素となる。）

1、その外部に無限要素を接続する。

5. 解の精度の評価基準（平均誤差AE）

(4),(5)の条件下での(3)の解析解C_Aは次式で与えられる。

$$C_A=\frac{1}{4\pi\sqrt{D_x D_y}\,\theta}\exp\left[\frac{v(x-x_0)}{2D_x}\right]\int_0^{\frac{v^2}{4D_x}t}\frac{1}{\tau}\cdot\exp\left[-\tau-\frac{v^2}{16D_x}\left\{\frac{(x-x_0)^2}{D_x}+\frac{(y-y_0)^2}{D_y}\right\}\frac{1}{\tau}\right]d\tau \quad (6)$$

有限要素法で得た数値解をC_Nとして、平均誤差AEを次式で定義する。

$$AE=\frac{100}{n-1}\sum_{i=1,\,i\neq n_0}^{n}\left|C_{Ai}-C_{Ni}\right|/C_{Ai}\quad(\%) \qquad (7)$$

ここに、総和は図3の太線内に存在する全節点についてとるものとし、添字iは第i節点での値を示す。ただし汚染源の存在する第n_0節点については、解析解を計算できないため和をとらない。AEが小さいほど数値解C_Nの精度が良いと考える。なお(7)式の積分計算には、高橋・森の二重指数関数型積分公式[2]を用いた。

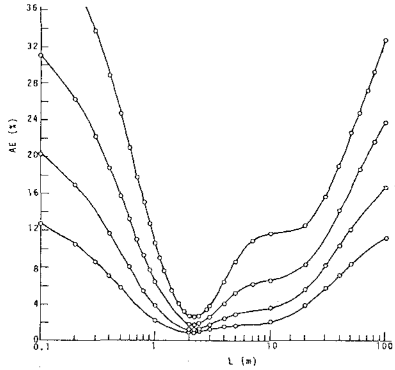

図4. LとAEの関係（定常条件）

6. 計算結果

6-1 定常解析 ： まず(3)式において$\frac{\partial C}{\partial t}=0$とおき、定常解析を行った。B.C.4について、無限要素の減衰長Lと平均誤差AEの関係をK=1,2,3,4について図4に示す。最適なL値を選択することが重要であることがわかる。図5にB.C.2,3,4でのAEとKとの関係を示す。B.C.4では図4より求めたLの最適値(L=2.2)を用いた。B.C.2,3では K=5にしても、AEの値はB.C.4のK=1での値より大きい。最適なL値が求められたとき無限要素が極めて有効であることがわかる。

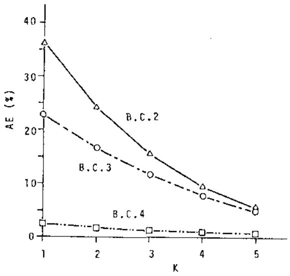

図5. KとAEの関係(定常条件)

6-2 非定常解析 ：(3)式の時間微分は中心差分を用いて離散化し、時間離散化間隔$\Delta t=1$とした。図6にB.C.4での$t=5$, K=1のときのLとAEとの関係を示す。L=1.6以上では解が不安定になった。定常条件のときと同様、最適なL値を選択することが重要であることがわかる。図7に、B.C.1,2,3,4での、K=1のときのtとAEの関係を示す。B.C.4では図6より求めたLの最適値(L=1.3)を用いた。B.C.4はAEの値も、AEの増加率も小さいことから、他の境界条件よりすぐれていると考えられる。他の境界条件では、大きな誤差を生じている。図8に各境界条件について、$t=8$でのAEとKの関係を示す。B.C.1,2,3でのAE値はK=4でほぼK=1のときのB.C.4のAE値に等しくなった。しかし計算容量節約の観点からは、最適なL値が求められるときは、B.C.4が有効であると考えられる。

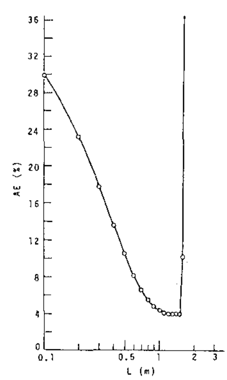

図6. LとAEの関係
(非定常, $\Delta t=1$, $t=5_{(day)}$)

7. 結論

移流分散方程式に関する開領域問題を解く場合、場を有限領域で近似すると、大きな誤差を生じる場合のあることがわかった。また、最適な減衰長Lが求められるときは、指数減衰型の無限要素は開領域問題に対し、極めて有効であると考えられる。最適減衰長Lの決定方法は今後の検討課題である。

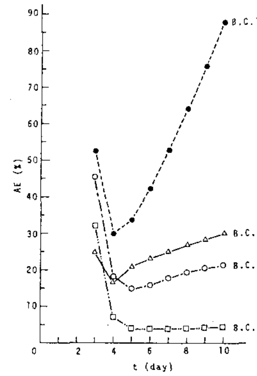

図7. tとAEの関係
($\Delta t=1_{(day)}$, K=1)

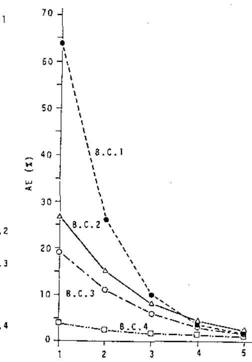

図8. KとAEの関係
(非定常, $\Delta t=1$, $t=8_{(day)}$)

参考文献

1)、加川 幸雄「開領域問題のための有限/境界要素法」 サイエンス社

2).「FACOM FORTRAN SSLII使用手引書」, 富士通