

信州大学工学部 正員 〇富所 五郎
大阪府正員 吉田 宏司
信州大学大学院 小島 宏一

1. はじめに・・・開水路における流れの三次元性は、合流部や湾曲流などにおいて顕著に現われており、その影響は無視できない。しかし、三次元数値解析は、計算機の容量や計算時間の制約を受けて今まであまり行われてなかった。本研究は、これらの問題を解決する三次元解析法として、形状関数に水平方向の従来の区分的多項式と鉛直方向の余弦関数の積を用いる Galerkin FEM を提案するものである。ここで、余弦関数は、二次元等流と湾曲流を対象として検討する。

2. 流れの基礎式・・・開水路における流れの基礎式は静水圧分布を仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \cdot u = g \cdot I_x - g \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \cdot v = g \cdot I_y - g \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \frac{\partial v}{\partial z}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3) \quad \text{ただし、} \lambda = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

となる。ここに、 x 軸は x 軸方向の平均勾配 I_x に平行、 y 軸は y 軸方向の平均勾配 I_y に平行、 z 軸は xy 平面に垂直で、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速成分、 t は時間、 g は重力加速度、 λ は xy 面から自由水面までの高さ、 A_h, A_v はそれぞれ、水平、鉛直渦動粘性係数である。(図-1 参照)

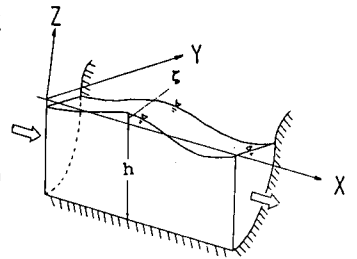


図-1 開水路の流れ

3. 数値解析法・・・式(1), (2)に式(3)より求めた w を代入した式と、式(3)を底より水面まで積分し、水面の運動学的条件を適用した式の有限要素法による定式化には、つぎに示す未知量の近似関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(B_p(Z-z)) \cdot U_{pi} \\ v &= N_i \cdot \cos(B_p(Z-z)) \cdot V_{pi} \\ z &= N_i \cdot z_i \end{aligned} \right\}, \quad B_p = \frac{(p-1) \cdot \pi}{h+z} \quad (4)$$

($i = i, j, k, \quad p = 1, 2, \dots, m$)

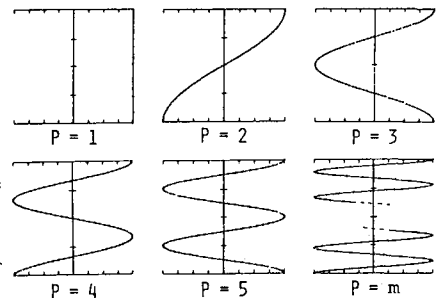


図-2 鉛直方向の形状関数

ここでは、総和規約を用いており、 N_i は三角形一次要素の形状関数、 i, j, k は三角形の頂点、 m は鉛直方向の形状関数 $\cos(B_p(Z-z))$ の展開項数である。(図-2 参照) 上式を基礎式に代入し、重み関数として、運動方程式には $N_i \cdot \cos(B_p(Z-z))$ 、連続式には N_i を用い有限要素法で定式化した式は、要素一つしかない時は、

$$\begin{aligned} M_{pgij} \cdot \dot{U}_{gj} + R X_{pgrijk} \cdot U_{gj} \cdot U_{rk} + R Y_{pgrijk} \cdot U_{gj} \cdot U_{rk} \\ = g \cdot I_x \cdot D_{pi} - g \cdot E X_{pij} \cdot z_j + K_{pgij} \cdot U_{gj} + F X_{pi} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{pgij} \cdot \dot{V}_{gj} + R X_{pgrijk} \cdot U_{gj} \cdot V_{rk} + R Y_{pgrijk} \cdot U_{gj} \cdot V_{rk} \\ = g \cdot I_y \cdot D_{pi} - g \cdot E Y_{pij} \cdot z_j + K_{pgij} \cdot V_{gj} + F Y_{pi} \end{aligned} \quad (6)$$

$$M_{ij} \cdot \dot{z}_j + K X_{gij} \cdot U_{gj} + K Y_{gij} \cdot V_{gj} = 0 \quad (7)$$

($g = 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad j = i, j, k; \quad k = i, j, k$)

となる。ここに、 $p = 1, 2, \dots, m, \quad i = i, j, k$ で、また、上つき・は時間微分を意味する。要素が多数存在する場合に式(5)~(7)の各項を各要素について求め、これらを各節点の流速成分に対する式について重ね合わせると、各節点の U_{gj}, V_{gj}, z_j を未知量とする連立方程式が得られる。各係数のうち質量行列 M_{pgij}, M_{ij} は、

$M_{pgij} = C \int_s N_i N_j (h+z) ds$, $M_{ij} = \int N_i N_j ds$ ($p=q=1$ の時 $C = \frac{1}{2}$, $p=q>1$ の時 $C = 1$, $p \neq q$ の時 $C = 0$)
 であり、流速成分の各展開項ごとにからみ合いがなく、時間積分として陽型式を用いる時には、各展開項ごとに連立方程式を解けばよく、計算機容量や計算時間の点で有利である。他の係数は紙面の都合上省略する。さらに本研究では、時間積分法として Runge-Kutta 法を用いている。

4. 数値解析例と考察・・・上の解析モデル

表一 等流の x 軸方向の流速

ルを、まず二次元の等流に適用してみるが、この時の基礎式は、 A_v を一足とすると、 $g I_x + A_v \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ となる。この式
 の原典を水底に於し、水面 $z=h$ で $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ と平均流速
 を $\bar{u}$ として積分すると $u = \bar{u} + \frac{g I_x}{6 A_v} \{ h^2 - 3(h-z)^2 \}$ が得ら
 れる。表一は、 $\bar{u} = 0.5 \text{ m/s}$, $I_x = 1/1000$, $h = 10 \text{ cm}$, $\tau = \frac{\pi}{2}$
 ソングの粗度係数 $n = 0.036$, $A_v = 0.068 n \sqrt{g \cdot (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} (h+z)$
 とした時の解析解と展開項数を m とした時の数値解を示す。
 両者は底面を除くと非常によく合っている。なお、ここでの

relative depth	velocity (m/s)				
	analitical solution	m=2	m=4	m=6	m=8
1.0	0.577	0.594	0.579	0.578	0.577
0.9	0.574	0.590	0.574	0.573	0.573
0.8	0.568	0.576	0.564	0.565	0.567
0.7	0.556	0.555	0.551	0.556	0.556
0.6	0.540	0.529	0.539	0.541	0.539
0.5	0.519	0.500	0.523	0.517	0.520
0.4	0.494	0.417	0.499	0.493	0.494
0.3	0.464	0.445	0.463	0.467	0.463
0.2	0.429	0.424	0.422	0.430	0.432
0.1	0.390	0.410	0.388	0.385	0.387
0.0	0.347	0.406	0.375	0.364	0.360

定常解は、非定常計算より求めている。つぎに、図-3 に示す内半径 40 cm、幅 80 cm の 180° の湾曲部と上
 側側 6.0 m、下側側 3.0 m の直線部よりなる水平水路で、Rosovskii より行われた実験値との比較を行う。この
 水路に、流量 12.3 l/s の水を流した時の各断面における鉛直方向に平均した平均流速と水位を図-3、4 に実線
 で示す。また図には、湾曲部と、上側側直線部を 2.4 m、下側側直線部を 4.0
 m とした解析領域を用いた計算値を点線で示す。この水路の Chezy の粗度係
 数 C は $C = 32$ で、これより $n = 0.0197$ とし、境界条件は下流端で水深 5.3 cm
 流速 29 cm/s、上流端で流量 12.3 l/s、さらに定常解は時間きざみを $\Delta t =$
 0.1 s として非定常計算により求めている。計算値は実験値には合っている
 る。また、この他に計算では各断面の鉛直流速分布、二次流の流速ベクトル
 などを求めているが、紙面の都合上講演時に示す。これらは、実験値との比
 較はなされていないが物理的にみてほぼ妥当なもので、本解析モデルの妥当性
 を示すものである。おわりに、文献 2) を提供して下さいました東京大学玉
 井教授に感謝の意を表するしだいです。

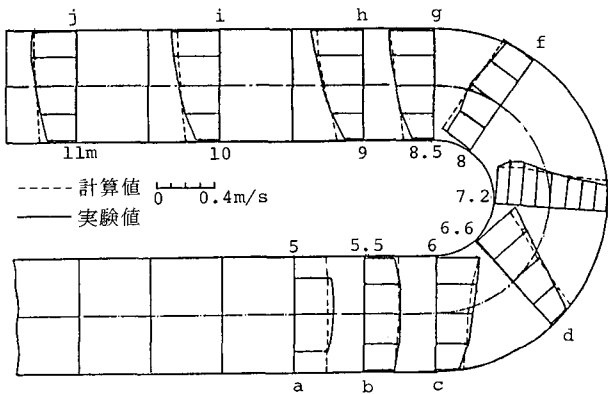


図-3 鉛直方向に平均した流速の分布

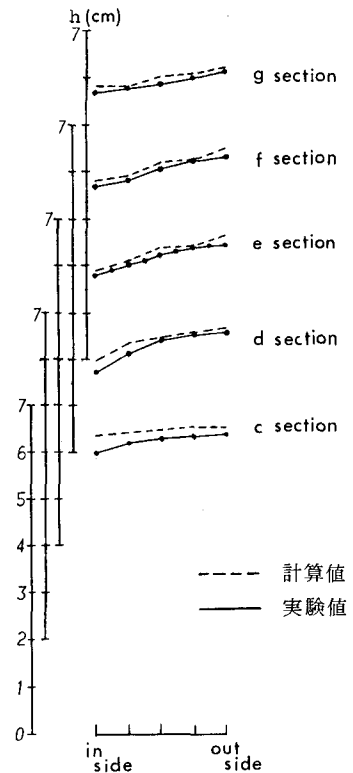


図-4 湾曲部の水位

- 1) 吉田宏司; 有限要素法による開水路流れの数値解析に関する研究, 信州大学修士論文, 1984.
- 2) J.L. Rosovskii; Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel Program for Scientific Translation, 1961.