

広島大学工学部 正 員 余越正一郎

広島大学工学部 正 員 細 田 尚

1. 序 論

本研究は、高速弯曲流を固定格子点の特性曲線法¹⁾で数値解析する一段階としての、解析に関する定式化について述べる。定常な平面流れの基礎式は、その特性曲線を求めれば、平面流れの Froude 数が 1 より大か小かによって、双曲型と楕円型に分類されるが²⁾、本研究では流れが全域にわたって双曲型のときを考え、さらに、固定格子点の特性曲線法を用いるため、同種の特性曲線の交差による衝撃波の発生がない流れを取り扱う。

2. 基礎式と特性曲線

基礎式は、円柱座標において、次のように表わされる。(Fig. 1)

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{\partial \theta} = B \quad (1)$$

ここに、

$$U = \begin{pmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} rv_r & rh & 0 \\ g & v_r & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_\theta & 0 & h \\ 0 & \frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{g}{r} & 0 & \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -v_r h \\ \frac{v_\theta^2}{r} \\ -\frac{v_r v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

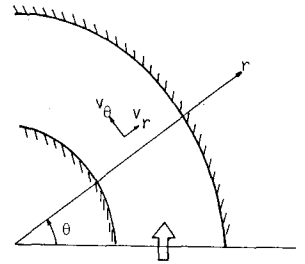


Fig. 1 座標系

(ξ, η) 系への座標変換を考え、 η 上 ($\xi = \text{一定}$) で U の値と U の η 方向の微係数が与えられたとき、 ξ 方向の微係数が定まらない条件が特性条件^{3), 1)}とよばれ、

$$\left(A_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(A_1 \frac{\partial \eta}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = B$$

$$\text{より、} \quad \det \left| A_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right| = 0 \quad (2)$$

で表わされる。

(2)式より、特性曲線は、 $A_2^{-1} A_1$ の固有値であって、

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rv_r}{v_\theta}, \quad \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \pm \frac{r\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} \quad (3)$$

となる。第一式は流線を表わしている。

3. 特性曲線上の関係式

次に、(3)式の各々に対応する $A_2^{-1} A_1$ の左固有ベクトルを求めると次のようになる。

$$\eta \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{rv_r}{v_\theta}; \quad \mu_1 = \left(1, \frac{v_r}{g}, \frac{v_\theta}{g} \right)$$

$$\xi_+ \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} + \frac{r\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}; \quad \mu_2 = \left(1, \frac{\sqrt{h} v_\theta}{\sqrt{g} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}, \frac{-\sqrt{h} v_r}{\sqrt{g} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}} \right) \quad (4)$$

$$\xi_- \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} - \frac{r\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}; \quad \mu_3 = \left(1, \frac{-\sqrt{h} v_\theta}{\sqrt{g} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}, \frac{\sqrt{h} v_r}{\sqrt{g} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}} \right)$$

固有ベクトル $\mathbf{M}$ を、

$$\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} + \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B}$$

に左より乗ずることにより、特性曲線上で成立する関係式¹⁾

$$\mathbf{M} \left(\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} + \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} = \mathbf{M} \left(\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} + \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\xi = \text{const.}} = \mathbf{M} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B} \quad (5)$$

が得られる。ここに、

$$\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{V_r V_\theta}{V_\theta^2 - g h} & \frac{h V_\theta}{V_\theta^2 - g h} & \frac{-h V_r}{V_\theta^2 - g h} \\ \frac{g}{V_\theta} & \frac{V_r}{V_\theta} & 0 \\ -\frac{g V_r}{V_\theta^2 - g h} & -\frac{g h}{V_\theta^2 - g h} & \frac{V_r V_\theta}{V_\theta^2 - g h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V_\theta}{r} \\ -\frac{V_r}{r} \end{pmatrix}$$

である。

4. 固定格子点の特性曲線法

固定格子点の特性曲線法は、境界条件の与え方が水理学的であることより、同種の特性曲線の交差が生じない緩慢な開水路非定常に用いられ¹⁾、成果を収めてきた。本研究でも、特性曲線網による解析は困難であるので、固定格子点での特性曲線法による差分化を行なう。ただし、流れは全域にわたって双曲型であり、かつ衝撃波が存在しないときに限られる。

Fig. 2 を参照して、特性曲線に沿った微係数が次のように近似される。

$$\begin{aligned} \zeta^+; \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} &\approx \frac{U_j^{n+1} - U_B}{d\theta} \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{d\theta}, \quad U \approx \frac{U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} &\approx \frac{U_j^{n+1} - U_B}{dr_+} \approx \frac{U_j^n - U_B}{dr_+} \approx \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} \end{aligned}$$

よって、 ζ^+ 上で

$$(\mathbf{M}_2)_j^n \left((\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1)_j^n \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{r d\theta} \right) = (\mathbf{M}_2)_j^n (\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B})_j^n \quad (6-a)$$

となる。 ζ^- 上でも同様に

$$\zeta^-; \quad (\mathbf{M}_2)_j^n \left((\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1)_j^n \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{dr_r} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{r d\theta} \right) = (\mathbf{M}_2)_j^n (\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{B})_j^n \quad (6-b)$$

となる。

一方、流線上の関係式はそのまま用いずに、非定常な平面流れの特性曲線法²⁾で用いられているように、連続式をそのまま差分化する。

$$\frac{V_\theta^n}{r} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{d\theta} + \frac{h_j^n}{r} \frac{V_\theta^{n+1} - V_\theta^n}{d\theta} + h_j^n \frac{V_{r,j+1}^n - V_{r,j-1}^n}{dr_1 + dr_r} + V_{r,j}^n \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{dr_1 + dr_r} + \frac{(V_r h)_r^n}{r} = 0 \quad (7)$$

一方、側壁では $V_r = 0$ より、連続式から $h V_\theta = \text{一定} (= h_0 V_\theta)$ となり、これと、側壁よりおろした ζ^+ あるいは ζ^- 上の関係式より V_θ , h が求められる。

以上、(6), (7) 式より原理的には流れの解析が可能であり、数値解析的な検討を行ないたい。

(参考文献)

- 1) 岩佐・井上・片山; 京大防災年報19号B-2, 2) 細田, 余越; 第28回水理講演会論文集,
- 3) Courant, Hilbert; 数理解物理学の方法, 東京図書, 4) 岩佐・井上・吉田; 京大防災年報24号B-2

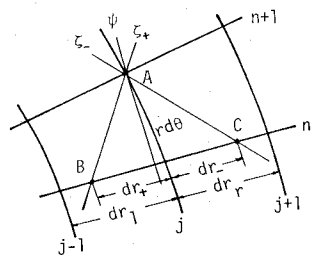


Fig. 2 差分格子