

1. まえがき

本発表は、ニュートン流体で定義されているレイノルズ数 Re を非ニュートン流体に拡張して定義し、ニュートン流体で一般に用いられている Moody 線図などを非ニュートン流体にも拡張して利用できるかどうか、新たに拡張されたレイノルズ数を提案するものである。

2. 拡張されたレイノルズ数の物理的意味

まず、非ニュートン流体の代表的な例としてビンガム流体を取り上げて拡張されたレイノルズ数を定義しよう。ビンガム流体における流体内部摩擦力とせん断歪速度 du/dr の関係は図-1に示すように

$$\tau = \eta_{pe} du/dr + \tau_0 \quad \text{----- (1)}$$

である。ここに η_{pe} を塑性粘度、 τ_0 を降伏応力という。拡張されたレイノルズ数 Re_1 と

$$Re_1 = \frac{\text{流れを乱そうとする力}}{\text{流れを乱すまいとする力}} = \frac{\rho l^3 u du/dr}{(\eta_{pe} du/dr + \tau_0) l^2} \quad \text{----- (2)}$$

と定義する。 l は管路の場合は管軸からの半径方向への距離、 ρ は流体密度、 u は長さの代表値である。これを流速の代表値 U を用いて書きなおすと

$$Re_1 = \frac{U l}{\eta_{pe}/\rho + k_1 \tau_0 l/\rho U} \quad \text{----- (3)}$$

次に、一般の非ニュートン流体について、同様に拡張されたレイノルズ数 Re_2 を定義してみよう。図-2のように、ニュートン流体(粘性係数 μ)より $g(\tau)$ 変化して $f(\tau)$ なるせん断歪速度 du/dr を示す非ニュートン流体を考えて

$$du/dr = f(\tau) = \tau/\mu - g(\tau) \quad \text{----- (4)}$$

をレイノルズ数の定義式である式(2)の前半に代入すると

$$Re_2 = \frac{\rho l^3 u du/dr}{\tau l^2} = \frac{U l}{\mu/\rho} \left(1 - \frac{\mu}{\tau} g(\tau) \right) \quad \text{----- (5)}$$

式(3) 同様に流速、長さの代表値を用いて示すと

$$Re_2 = Re \left\{ 1 - k_2 \frac{\mu}{\tau_0} g(\tau_0) \right\} \quad \text{----- (6)}$$

ただし、 $Re = U l / (\mu/\rho)$ はニュートン流体で定義されるレイノルズ数であり、 τ_0 は τ の代表値である。

式(3)、式(6)のように非ニュートン流体における拡張されたレイノルズ数 Re_1 、 Re_2 を定義すると、諸量の代表値を用いるために未知の無次元係数 k_1 、 k_2 が入ってくる。

3. 拡張されたレイノルズ数の別の定義

半径 a の円管内の流れにおいては、管内流体摩擦力では壁面摩擦力を τ_0 として $\tau = \tau_0 r/a$ ----- (7) である。式(4)を r で積分して式(7)により r を τ に変数変換すると

$$u = \int_a^r \frac{du}{dr} dr = \frac{a}{\tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau) d\tau = \frac{a}{2\tau_0 \mu} (\tau^2 - \tau_0^2) - \frac{a}{\tau_0} \{ G(\tau) - G(\tau_0) \} \quad \text{----- (8)}$$

ただし、 $G(\tau) = \int g(\tau) d\tau$ である。

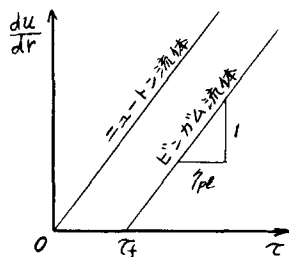


図-1

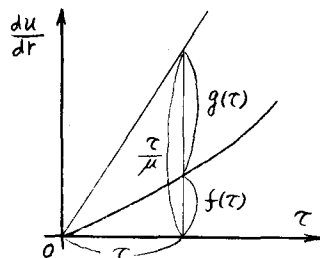


図-2

次に平均流速 u_m を計算すると

$$u_m = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u \cdot 2\pi r dr = \frac{2}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} u \tau d\tau = -\frac{2a\tau_0}{8\mu} (1 - X(\tau_0))$$

ただし、 $X(\tau_0) = \frac{8\mu}{\tau_0^4} \left\{ \frac{1}{2} G(\tau_0) \tau_0^2 - \int_0^{\tau_0} G(\tau) \tau d\tau \right\}$ } ----- (9)

となり、 τ_0 と抵抗係数 λ との関係 $\tau_0 = -\lambda \rho u_m^2 / 8$ を用いて式(9)を書きなおすと

$$\lambda = \frac{64\mu}{2\rho a u_m \{1 - X(\tau_0)\}} = \frac{64}{Re \{1 - X(\tau_0)\}} \quad \text{----- (10)}$$

となる。したがって、拡張されたレイノルズ数 Re_3 を

$$Re_3 = Re \{1 - X(\tau_0)\} \quad \text{----- (11)}$$

と定義すると、非ニュートン流体においても、層流域で Moody 線図を用いることが可能になる。式(1)で示したビンガム流体の場合には $X(\tau_0) = (4/3)(\tau_0/\tau_0) - (1/3)(\tau_0/\tau_0)^4$ となり、 Re_3 に相当する拡張されたレイノルズ数 Re_4 は

$$Re_4 = Re \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_0} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_0} \right)^4 \right\} \quad \text{----- (12)}$$

である。

4. 実験による確認

これらの拡張されたレイノルズ数が Moody 線図に適合するか、あるいは未知無次元係数 k_1 はどのくらいの値になるか確認するため実験を行った。

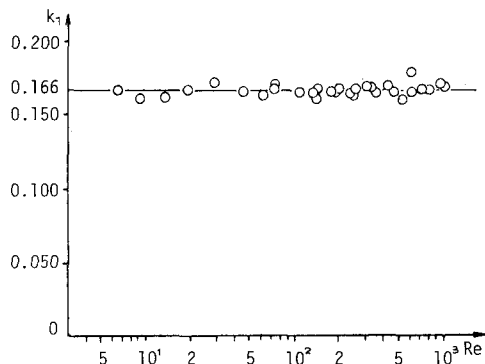


図-3 式(3)で定義した係数 k_1 と Re の関係

流体は水とベントナイト(比重1.1)の混合流体とし、その混合比は水の重量を W 、ベントナイトの重量を V として $W/V = 7 \sim 15$ (1step) の9種類とした。これらの混合流体をビンガム流体とみなして、密度 ρ 、塑性粘度 η_{pl} 、降伏応力 τ_0 を実験より定めて、内径 d が 20 mm と 30 mm の2種類の円管内を流して摩擦によるエネルギー消費を求めて、壁面摩擦 τ_0 を算定した。

次に、長さの代表値を円管の内径 d 、流速の代表値を流量を流積で割った平均流速 u_m として、理論的に Moody 線図に適合するレイノルズ数 Re_k と式(3)で物理的に定めたレイノルズ数 Re_1 が一致するよう無次元定数 k_1 を求めると図-3に示すように、 $k_1 = 0.166$ とほぼ定数となった。

また、各実験値に対して Darcy-Weisbach の式 $h_e = \lambda (l/d) (u_m^2/2g)$ より抵抗係数 λ を算定し、これと、ニュートン流体として定義されるレイノルズ数 Re 、および拡張されたレイノルズ数 Re_1 、 Re_4 の関係を図化すると、 Re_1 、 Re_4 が層流域の Moody 線図を満足していることがわかった。図-4は、その一例である。

最後に、本実験に協力を頂いた当時の大学院生大泉英俊君、4年生の金井広光、渡辺一郎両君に謝意を表す。

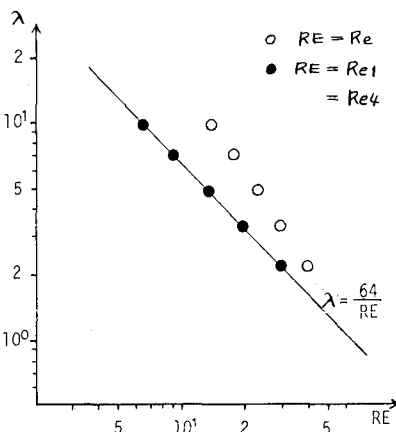


図-4 Moody 線図 ($W/V = 7$ の場合)