

東京都立大学 正員 宇井 正和
東京都立大学 正員 安川 浩

1. まえがき 下水管渠が満管状態となった場合、断面急変部を有するマンホール内に浸入した水面は、それらのスラブ面に衝撃的な圧力を及ぼしながら振動し、管路内流体を急変不定流へと導く。このような管内水理現象を解明するために、著者等はマンホール(ライザー)内の鉛直水流加速度を考慮した動水勾配線高度による運動方程式(1)式を導いたが、その結果、方程式は dQ_i/dt に関する連立方程式を構成し、その解法が数値積分するための重要問題となった。しかし、連立方程式をマトリックス表示すると、ほとんどの要素が対角部分に集中する中で、枝管との合流部近傍の関係式が不連続な番号管路と接続するために、要素が全体に散らばり、マトリックスの消去法を用いざるを得なかった。

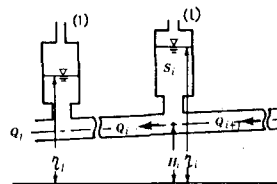


図 - 1

しかし、より迅速で系統的処理法が不可欠のため、開水路網等で用いられてきた DOUBLE SWEEP 法⁽²⁾の適用を試みたので、その解析手順と応用結果をここに報告する。図-1の管内流量 Q_i に関する方程式は次式となる。

$$dQ_i/dt = C_i(H_{i+1} - H_i) - d_i, \quad (H_i = a_i + b_i(dQ_i/dt - dQ_{i-1}/dt)) \quad \text{----- 1)}$$

C_i と d_i は i 番管路の形状による定数と、管内抵抗であり、又 a_i は Q_i^2 を含む項であるが b_i は定数である。

2. DOUBLE SWEEP 法

対象とする管路系のモデルを図-2に示す。○印はライザーを、—印は管路を示している。枝管との合流はライザーを介して為され、複数個の枝管が1点に合流しないものとする。又ここで

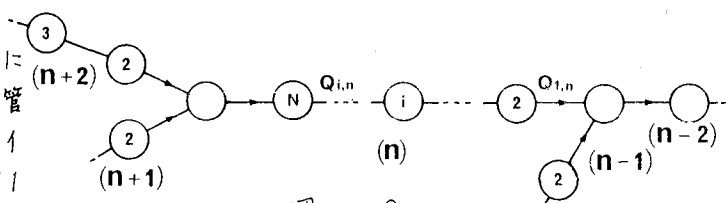


図 - 2

扱う管路系は、枝管とループを形成するものは除き、全て Tree 構造とした。DOUBLE SWEEP 法を適用するために、管路系を、上流端から合流部あるいは合流部から次の合流部までを単位とする小管路系群に分割する。図-2はこのように分けられた小管路系を表わしにものであり、 n は下流側から n 番目の小管路系である事を示している。 n 番小管路系での管路内流体運動の方程式をマトリックス表示したものが2)式である。

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,n}, \beta_{1,n}, 0 & - & - & - & - & 0 \\ A_{2,n}, B_{2,n}, C_{2,n}, & & & & & | \\ 0 & A_{3,n}, B_{3,n}, C_{3,n}, & & & & | \\ \vdots & & - & - & - & | \\ & & & A_{i,n}, B_{i,n}, C_{i,n}, & & | \\ \vdots & & & & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & \alpha_{n,n}, \beta_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q'_{1,n} \\ Q'_{2,n} \\ Q'_{3,n} \\ \vdots \\ Q'_{i,n} \\ \vdots \\ Q'_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1,n} \\ D_{2,n} \\ D_{3,n} \\ \vdots \\ D_{i,n} \\ \vdots \\ D_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{----- 2)}$$

ここで、 $Q'_{i,n} = dQ_{i,n}/dt$ である。今 $i+1$ 番管路に対する方程式が、

$$Q'_{i+1,n} = E_{i+1,n} \cdot Q'_{i,n} + F_{i+1,n} \quad \text{----- 3)}$$

と表わせたとすれば、 i 番目の方程式 $A_{i,n} Q'_{i-1,n} + B_{i,n} Q'_{i,n} + C_{i,n} Q'_{i+1,n} = D_{i,n}$ へ代入して整理すると次式が求まる。

$$Q'_{i,n} = \frac{A_{i,n} Q'_{i-1,n} + D_{i,n} - C_{i,n} F_{i+1,n}}{C_{i,n} E_{i+1,n} + B_{i,n}} = E_{i,n} \cdot Q'_{i-1,n} + F_{i,n} \quad \text{----- 4)}$$

$$E_{i,n} = A_{i,n} / (B_{i,n} + C_{i,n} E_{i+1,n}), \quad F_{i,n} = (D_{i,n} - C_{i,n} F_{i+1,n}) / (B_{i,n} + C_{i,n} E_{i+1,n}) \quad \dots 5)$$

即ち、4)、5)式は $Q'_{i,n}$ と $Q'_{i+1,n}$ を関係づける $E_{i,n}$ と $F_{i,n}$ を循環的に求める方法を与えてくれる。故に、この操作を押し進める事によって $E_{i,n}, F_{i,n}$ を求めながら2番管路の次式まで到達する。

$$Q'_{2,n} = E_{2,n} \cdot Q'_{1,n} + F_{2,n} \quad \dots 6)$$

2-1. 下流端管路条件 $n=1$ の時の $Q_{1,n}$ は、それが最下流端管路内流量であるため、その関係式は2)式の中で示されるように $\alpha_{1,1} Q'_{1,1} + \beta_{1,1} Q'_{2,1} = \gamma_{1,1}$ の形で表わされ、6)式と合わせて方程式が閉じ、 $Q'_{1,1}, Q'_{2,1}$ を決定する事ができる。それ故、これらの値を用い、4)式に従って順次述のぼうりながら全ての $Q'_{i,n}$ が決定される。通常、 $E_{i,n}, F_{i,n}$ を求める手順を forward sweep、そして逆のぼうりながら $Q'_{i,n}$ を求めていく手順を backward sweep と呼んでいる。

2-2. 接続条件 n 番小管路系が $n-1$ 番小管路系と合流してさらに下流へ続く場合には、2)式中の $\alpha_{i,n} Q'_{i,n} + \beta_{i,n} Q'_{2,n} = \gamma_{i,n}$ は成立せず、 $n-2$ 番小管路系を含めた接続条件が必要になる。

管路系の合流は1本のライザーを通して行われるため、そこでのライザーは3本の小管路系の下流端および上流端ライザーを兼ねて

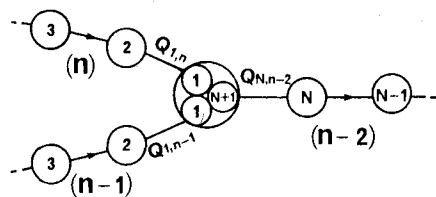


図 - 3

いる(図-3)。流量 $Q_{1,n}, Q'_{1,n-1}$ および $Q_{N,n-2}$ に関する方程式は、ライザー内流量の連続条件を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} Q'_{1,n} &= C_{1,n} \{a_{2,n} + b_{2,n} (Q'_{2,n} - Q'_{1,n})\} - C_{1,n} \{a_{1,n} + b_{1,n} (Q'_{1,n} + Q'_{1,n-1} - Q'_{N,n-2})\} - d_{1,n} \\ Q'_{1,n-1} &= C_{1,n-1} \{a_{2,n-1} + b_{2,n-1} (Q'_{2,n-1} - Q'_{1,n-1})\} - C_{1,n-1} \{a_{1,n-1} + b_{1,n-1} (Q'_{1,n} + Q'_{1,n-1} - Q'_{N,n-2})\} - d_{1,n-1} \\ Q'_{N,n-2} &= C_{N,n-2} \{a_{N+1,n-2} + b_{N+1,n-2} (Q'_{1,n} + Q'_{1,n-1} - Q'_{N,n-2})\} - C_{N,n-2} \{a_{N,n-2} + b_{N,n-2} (Q'_{N,n-2} - Q'_{1,n-1})\} - d_{N,n-2} \end{aligned} \right\} 7)$$

ここで、共通のライザーに関する諸量は等しいから、 $a_{1,n} = a_{1,n-1} = a_{N+1,n-2}$, $b_{1,n} = b_{1,n-1} = b_{N+1,n-2}$ である。

さらに、6)式と、 $n-1$ 番小管路系での $Q'_{2,n-1} = E_{2,n-1} Q'_{1,n-1} + F_{2,n-1}$ を7)式へ代入して解くと、

$$\left. \begin{aligned} Q'_{1,n} &= E_1 Q'_{1,n-1} + K_1 \\ Q'_{1,n-1} &= E_2 Q'_{N,n-2} + K_2 \\ Q'_{N,n-2} &= E_{N,n-2} Q'_{1,n-1} + F_{N,n-2} \end{aligned} \right\} \quad \dots 8)$$

E_1, E_2 および K_1, K_2 は計算過程で決まる定数である。以上により、 n 番小管路系の下流端まで進んできた $E_{2,n}, F_{2,n}$ は、 $n-2$ 番小管路系の上流端管路の $E_{N,n-2}$ および $F_{N,n-2}$ へと接続されることになる。

結局、小管路系内での4)式および5)式と、合流部での8)式の手順を forward sweep で進める事により $E_{i,n}, F_{i,n}$ を決めながら最下流端管路へ到達し、そこで2-1で述べたように $Q'_{1,1}$ と $Q'_{2,1}$ を決定した後、backward sweep に従って逆もどろしりながら全系の $Q'_{i,n}$ が求められる。

もし、 $n-2$ 番小管路系の管路数が1本、即ち合流点で連続している場合には、 N 番ライザーの動水勾配線高度に $n-3$ および $n-4$ 番小管路系の流量も関係するため、7)式に $Q'_{1,n-3}, Q'_{N,n-4}$ に関する方程式を加えて新たな接続条件を作る必要がある。

3. 応用結果 筆者等は今まで、ライザー数28本、管路数27本を有する管路系内の急変不定流をマトリックスの消去法をもとに $Q'_{i,n}$ を求め、解析してきたが、この計算プログラムの中で消去法を DOUBLE SWEEP 法に交換して適応性を調べた。管路系は3個の合流点を含む7つの小管路系から構成されるもので、既往のプログラムと結合するために変数変換も付加されたが、全体の演算時間(CPU時間)で約15%の短縮を見る事ができた。消去法では管路が一つ増えたり1行大きなマトリックスの計算が必要となるが、DOUBLE SWEEP 法では代数計算が1つ増えただけに過ぎない。したが、この方法はアルゴリズムが複雑になる難点があるが、管路数の多い系に対しては極めて有効な解析法といえる。

4. 参考文献 (1) 安川、宇井、尾上：下水管渠内急変被圧不定流の解析法、才28回水講演文集 1984

(2) Cunge, J. A. 他: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, PITMAN 1980