

九州大学工学部 正員 栗谷陽一
九州工業大学 正員 ○藤崎一裕
九州工業大学 学生員 大浦芳弘

1. まえがき

沈降性粒子の移流分散に及ぼす密度勾配の影響について調べた。水路底部への粒子の沈積がない場合を解析の対象とし、流れは開水路2次元とした。

渦動粘性係数と鉛直方向密度勾配との関連については、Monin-Obukhovの相似理論を用い、流下方向密度勾配が粒子流束に及ぼす影響は摂動法により求めた。

2. 基礎方程式

図1のように河床流下方向にx軸、これに垂直上方にz軸ととり、流れはx-z平面内の2次元等流とすると、x, z方向の運動方程式と流体及び物質の保存則は、次式で示される。

$$0 = \rho g \left(1 - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \quad (1)$$

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

$$d/dx \left(\int_0^h u dz \right) = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_* \frac{\partial C}{\partial z} + w_* C \right) \quad (4)$$

ここに、 p : 懸濁液のみかけ密度、 p : 圧力、 u : x方向流速、 w_* : 粒子沈降速度、 h : 水深、 ε : 渦動粘性係数、 ε_* : 渦拡散係数、 i : 水面勾配である。濃度 C の値は小さく、密度との関係は (5) 式で近似される。

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha C) \quad (5)$$

ρ_0 : 流体の密度、 α : 定数である。濃度のx方向の変化が小さい場合を想定しているから、xについて展開して必要な次数で打ち切るとすると

$$C(x, z) = \bar{C}(z) (1 + Kx) + K_1 h F(z) \quad (6)$$

と表わされ、定数 K は z には独立な一定の微小量で

$$K = \frac{1}{\langle C \rangle} \frac{d\langle C \rangle}{dx} \quad (7)$$

と表わされる。 $\langle \rangle$ は全水深についての平均と意味する。

Monin と Obukhov の理論によると、渦動粘性係数 ε と密度勾配との関連は次式で表わされる^{1), 2)}。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \beta R_f) \quad (8)$$

β : 定数、 ε_0 :

$R_f = 0$ のときの ε

$$R_f = \frac{g/\rho}{-u'w'/\partial u/\partial z} \quad (9)$$

w : z方向流速、 $'$ は時間変動成分を表わす。(8) 式は局所 Richardson 数 R_i を用いると次式で表わされる

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \gamma \beta R_i) \quad (10)$$

$$R_i = \frac{-g(\partial \rho / \partial z)}{\rho (\partial u / \partial z)^2}, \quad \gamma = \frac{R_f}{R_i} \quad (11)$$

渦動粘性係数と流速分布との関係には混合距離理論を用い、濃度 $C = 0$ のときの流速分布に對数則を仮定すると

$$\tau = \rho \varepsilon_0 du/dz, \quad \varepsilon_0 = \ell^2 du/dz \quad (12)$$

$$\ell = \kappa z \sqrt{1 - z/h} \quad (13)$$

となる。 τ : 剪断応力、 ℓ : 混合距離、 κ : カルマンの定数である

(5), (6) 式を (2) 式に代入して p を求め、これを (1) 式に代入すると次式がえられる

$$0 = 1 - \frac{\bar{K}}{F_r^2} \int_0^1 \bar{C} d\eta + \frac{d}{d\eta} \left(\bar{E} \frac{d\bar{u}}{d\eta} \right) \quad (14)$$

$$F_r^2 = \frac{u_*^2}{\alpha \langle C \rangle g h}, \quad (u_* = \sqrt{g h i}) \quad (15)$$

また、(5), (4) 式から

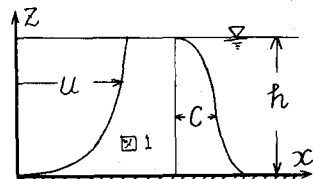
$$\bar{K} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{E}_* \frac{\partial \bar{C}}{\partial \eta} + W C \right) \quad (16)$$

が導かれる。 ε についても同様に、(10), (11), (8) 式などから、次式がえられる

$$\bar{E} = \kappa \eta \left\{ 1 - \frac{\bar{K}}{F_r^2} \left\{ \int_0^1 \bar{C} d\eta \right\} \right\} \{ 1 - \beta \gamma R_i \} \quad (17)$$

$$R_i = - \frac{1}{F_r^2} \left\{ \frac{1}{\langle C \rangle} \frac{d\bar{C}/d\eta}{(du/d\eta)^2} - \bar{K} \frac{dF/d\eta}{(du/d\eta)^2} \right\} \quad (18)$$

上式中、 η : z/h , $\bar{z}$: z/h , $\bar{K} = K \cdot h$, $\bar{u} = u/u_*$



$W = w_0 / u_*$, $\bar{E} = E / (\kappa u_*)$, $E_* = E_* / (\kappa u_*)$ である。

(14), (16), (17) 式の解を $\bar{E}$ をパラメータとする

摂動法により求める

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + \bar{F} u_1 + \bar{F}^2 u_2 + \dots \\ F &= F_0 + \bar{F} F_1 + \bar{F}^2 F_2 + \dots \\ \bar{E} &= E_0 + \bar{F} E_1 + \bar{F}^2 E_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

とおき, 上式を (14), (16), (17) 式に代入して

$$\bar{F}^0: 1 + \frac{d}{d\eta} (E_0 \frac{du_0}{d\eta}) = 0 \dots (20)$$

$$\frac{d}{d\eta} (E_0 \frac{d\bar{C}}{d\eta} + W \bar{C}) = 0 \dots (21)$$

$$E_0 = \kappa \eta (1-\eta) (1 - \beta R_{10}), (R_{10} = \frac{-1}{\langle F_r^2 \rangle} \frac{d\bar{E}/d\eta}{(du/d\eta)^2}) \dots (22)$$

$$\bar{F}; -\frac{1}{F_r^2} \int_0^1 \bar{C} d\eta + \frac{d}{d\eta} (E_0 \frac{du_1}{d\eta} + E_1 \frac{du_0}{d\eta}) = 0 \dots (23)$$

$$\hat{u}_{s0} \bar{C} = \frac{d}{d\eta} (E_0 \frac{d\bar{F}}{d\eta} + W \bar{F}_0) \dots (24)$$

$$\hat{u}_{s0} = u_s - u_{s0}, u_{s0} = \langle u \bar{C} \rangle / \langle C \rangle$$

$$E_1 = -\frac{1}{F_r^2} \kappa \eta \int_0^1 \bar{C} d\eta (1 - \beta R_{10}) - \kappa \eta (1-\eta) \cdot \beta \cdot R_{11} \dots (25)$$

$$R_{11} = R_{10} (dF/d\eta) / (dE/d\eta)$$

などがえられる。ただし, $\bar{E} = \bar{E}_*$ (したがって $\gamma = 1$) とした。

$\lambda = 0$ における粒子拡散流束の断面積分値及び移流分散係数 D_L はそれぞれ以下の式で与えられる。

$$\langle (\bar{u} - u_{s0}) \bar{C} \rangle = \langle (u - u_{s0}) \bar{C} \rangle + \bar{F} \langle u_1 \bar{C} \rangle + \bar{F} \langle (u_0 - u_{s0}) F_0 \rangle$$

$$D_L / (\kappa u_*) = -\langle (u_0 - u_{s0}) F_0 \rangle - \langle u_1 \bar{C} \rangle \dots (26)$$

3 計算結果と考察

図2～図6に, (20)～(22)式で求めた, 流下方向に濃度勾配がない場合の解を示す。図3中の破線は Rouse の濃度分布 ($\sin \pi z / (\pi z)^{1/2} / \eta^2$) である。図7～図10には $\bar{F}$ の1次に比例する項の解を示す。

図2, 3, 4, 5, 11中の破線は密度流の影響を考慮しない場合の値である。これらの図から, F_r の値が小さくなり, 相対的に密度勾配の影響が大きくなるにつれて, 渦動拡散係数, 流速分布や粒子濃度分布に変化が生じ, 分散係数が増大していく様子を知らることができる。なお, 数値計算では $\kappa = 0.4$, $\beta = 5.0$ ⁴⁾ とし, 数値積分は台形公式を用いた。

参考文献

1) 谷一郎編: 流体力学の進歩—乱流, 丸善, pp.195～, 1979

2) Turner, J.S.: Buoyancy Effects in Fluids, Cam Univ. Press, pp.130～, 1973

3) Sumer, B.M.: J. Fluid Mech., Vol.65, part 1, pp.11～28, 1974

4) T. Itakura & T. Kishi: PASCE, Vol.106, No. HY8, pp.1325～1343, 1979

