

○(株) 竹中土木 正員 平井 卓
神戸大学工学部 正員 篁 源亮

1. はじめに 本研究は流速、密度が鉛直方向に連続的に変化する流れの安定性を弱非線形理論を用いて考察し、実験を行って理論的結論と比較した。本研究における理論的研究は Drazin¹⁾ の線形理論を Stuart²⁾ の手法に従って弱非線形理論に発展させたものである。

2. 理論的研究 対象とする流体は、非圧縮性・非粘性であるとし Boussinesq 近似が適用できるものと仮定する。運動は重力場における二次元的なものを考える。諸量の主流成分に $\bar{}$ を付け、変動成分に $\hat{}$ をつけて表わすとする、重力ベクトル、速度ベクトル、密度、圧力はそれぞれ $\mathbf{g} = (0, -g)$, $\mathbf{u} = (\bar{u}(y) + \hat{u}, \hat{v})$, $\rho = \bar{\rho} + \hat{\rho}$, $p = \bar{p} + \hat{p}$ と表わされる。ただし、 x は水平方向、 y は鉛直方向の座標である。これら諸量を Euler の運動方程式に代入し、 x 成分、 y 成分の2式より圧力項を消去すれば、変動成分に関する非線形方程式が得られる。さらに流れ関数の変動成分 $\hat{\psi}$ を導入すれば、 $\hat{u} = \partial \hat{\psi} / \partial y$, $\hat{v} = -\partial \hat{\psi} / \partial x$ で表わされ、結局 $\hat{\psi}$ に関する非線形運動方程式が次式の様になる。

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'(\hat{\psi}_{tt} + \bar{u}\hat{\psi}_{xy} - \bar{u}'\hat{\psi}_x) + \bar{\rho}\{\hat{\psi}_{yxt} + \hat{\psi}_{xxt} + \bar{u}(\hat{\psi}_{yyx} + \hat{\psi}_{axx}) - \bar{u}''\hat{\psi}_x\} + \hat{\rho}_x g = \bar{\rho}'(\hat{\psi}_y\hat{\psi}_{xx} - \hat{\psi}_x\hat{\psi}_{yy}) \\ - \hat{\rho}_y(\hat{\psi}_{tt} + \bar{u}\hat{\psi}_{xy} - \bar{u}'\hat{\psi}_x) - \hat{\rho}_x(\hat{\psi}_{tt} + \bar{u}\hat{\psi}_{xy}) - \bar{\rho}\{\hat{\psi}_y(\hat{\psi}_{yyx} + \hat{\psi}_{axx}) - \hat{\psi}_x(\hat{\psi}_{yyy} + \hat{\psi}_{xyy})\} \end{aligned} \quad (1)$$

また、変動成分に関する非圧縮の条件式は線形化して次式の様に得られる。

$$\hat{\rho}_t + \bar{u}\hat{\rho}_x - \bar{\rho}'\hat{\psi}_x = 0 \quad (2)$$

ただし、ダッシュは y に関する常微分、添字は偏微分を表わす。

本研究のモデルとしては、Drazin のモデルを考え、流速分布が $\bar{u} = V \tanh(y/d)$ 、密度分布が $\bar{\rho} = \rho_0 \exp(-\beta y)$ で表わされる図-1 に示すモデルを考えた。境界条件は

$$\hat{v} = 0 \quad (3)$$

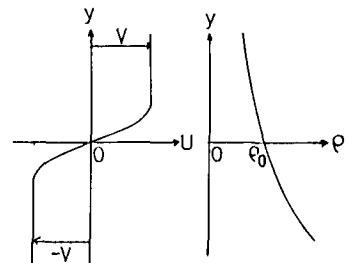
である。

Drazin¹⁾ は線形理論によって図-2 の様な中立曲線を求めており、本研究では安定限界 $(\alpha_c, J_c) = (\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4})$ 近傍の p 点における安定性を考察する。ただし、 α は波数、 J はリチャードソン数である。

$\hat{\psi}, \hat{\rho}$ が ε の級数展開として次式の様に表わされるものとする。

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = \varepsilon(\phi_1(y,t)e^{i\theta} + \phi_1^*e^{-i\theta}) + \varepsilon^2(\phi_2e^{2i\theta} + \phi_2^*e^{-2i\theta}) + \varepsilon^3(\phi_3e^{i\theta} + \phi_3^*e^{-i\theta}) \\ \hat{\rho} = \varepsilon(\rho_1e^{i\theta} + \rho_1^*e^{-i\theta}) + \varepsilon^2(\rho_2e^{2i\theta} + \rho_2^*e^{-2i\theta}) + \varepsilon^3(\rho_3e^{i\theta} + \rho_3^*e^{-i\theta}) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\theta = x - C_r t$ であり、 C_r は位相速度である。Drazin は $C_r = 0$ と考えた。(4)を(1),(2)式に代入し、 $\phi_1 = A(t)\bar{\Phi}_1(y)$, $\phi_2 = A^2\bar{\Phi}_2$, $\phi_3 = A|A|^2\bar{\Phi}_3$ と表わされるものとして ε の各オーダーについて以下に示す式が求められる。ただし、求められた式は、流速の代表尺度 V 、速度場の長さの代表尺度 d 、密度場の長さの代表尺度 $1/\beta$ 等を用いて無次元化されている。また、リチャードソン数 J は $J = g\beta d^2/V^2$ で定義されるものとする。



流速分布 密度分布
図-1 モデル

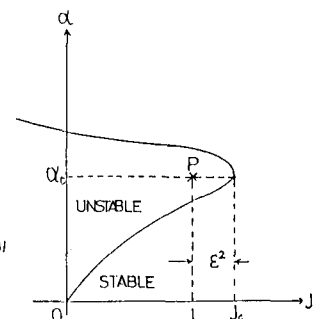


図-2 中立曲線

$$o(\varepsilon): L(\Phi_1) = \bar{u}(\Phi_1'' - \alpha_c^2 \Phi_1) - \bar{u}''\Phi_1 + \frac{J_c}{\bar{u}}\Phi_1 = 0 \quad (5)$$

$$o(\varepsilon^2): \bar{u}(\Phi_2'' - 4\alpha_c^2 \Phi_2) - \bar{u}''\Phi_2 + \frac{J_c}{\bar{u}}\Phi_2 = \frac{1}{2}(\Phi_1\Phi_1'' - \Phi_1'\Phi_1') \quad (6)$$

$$o(\varepsilon^3): \beta L(\Phi_3) = \frac{dA}{dt}(\Phi_1'' - \alpha_c^2 \Phi_1) + i\alpha A(\frac{J}{\bar{u} - iC_i} - \frac{J_c}{\bar{u}}) \quad (7)$$

ただし、 $G(y)$ は次式で与えられる。ここに C_i は線形理論における複素数の位相速度 C の虚部である。

$$G(y) = (\frac{J}{\bar{u} - 3iC_i} - \frac{J_c}{\bar{u}})\Phi_3 + \Phi_2\Phi_1'' + 3\alpha_c^2\Phi_2\Phi_1' - 2\Phi_2''\Phi_1' + 6\alpha_c^2\Phi_2\Phi_1' - \Phi_1^*\Phi_2'''$$

境界条件は (3) より $y = \pm\infty$ で $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ となる。この条件を (5), (6) に適用すれば、解が $u = \tanh y$ を独立変数として $\Phi_1 = \{u^2(1-u^2)\}^{1/4}$, $\Phi_2 = 1.01u^3 + 0.188u^2 - 1.016u - 0.188$ の様に得られる。ただし、 Φ_1 は Drazin の理論解、 Φ_2 は近似解である。(5) 式の随伴微分方程式が

$$L^*(X) = uX'' + 2(1-u^2)X' - (\alpha_c^2 u - \frac{J_c}{\bar{u}})X = 0 \quad (8)$$

で与えられる。境界条件として $y = \pm\infty$ で $x=0$ を考えると (8) 式の解は $x = \{(1-u^2)/u^2\}^{1/4}$ となり、これを (7) 式の両辺にかけて $y = \infty \sim y = -\infty$ で積分を実行すると左辺が 0 となり次のランダウの振幅方程式が得られる。

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha_c C_i A + |J - J_c| \{-3\alpha_c C_i + i9.421(\frac{\alpha_c}{J})\} A |A|^2 \quad (9)$$

(9) 式より $|A|$ の時間変化について (10) 式が得られ、波高 H と位相速度 C_r の関係が (11) 式の様になる。

$$|A|^2 = \frac{A_0^2}{-3|J - J_c| + (1+3|J - J_c|A_0^2)\exp(-2\alpha_c C_i t)} \quad (10) \quad H^2 = \frac{\Phi_1^2(y) J C_r}{2.36 |J - J_c| \{U(y) - C_r\}^2} \quad (11)$$

ただし、 A_0 は $|A|$ の初期値である。

3. 実験的研究 断面が 30cm×54cm の長方形、有効長 328.5cm の管水路を用いて実験を行った。静止した塩水二層の上層に淡水を循環させる三層流において上層と中間層の界面に自然発生する内部波を写真撮影した。上層の密度 ρ_1 、下層の密度 ρ_2 として、淡水層の平均流速を V とした時、リチャードソン数を $J = (gd/V^2) \cdot (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$ で定義した。図-3 は実験結果として得られる波高の時間変化をプロットしたものであり、図-4 は位相速度と波高の関係をプロットしたものである。また (11) 式の理論曲線を実線で線形理論曲線を破線で示した。

4. 結論 図-3 の実験条件は線形理論では不安定領域と考えられ、波高がある高さになるまでは波高は直線的に時間とともに増幅するが、それ以後は減衰の傾向を示す。一方、理論的には (10) 式より波高は増幅を続けるはずであり、実験結果と矛盾する。これは粘性の影響と考えられる。波高と位相速度の関係については線形理論曲線より、非線形理論曲線に実験結果が対応していることが図-4 よりわかる。

参考文献 1) Drazin, P. G.: Eng'ng Mech. Div., Proc. ASCE, Vol.87, EM 6, 1961.

2) Stuart, J. T.: Fluid Mech., Vol.9, 353, 1960.

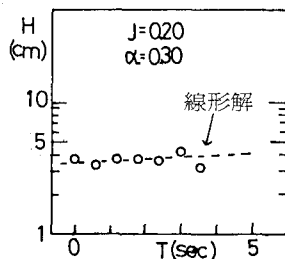


図-3 波高の時間変化

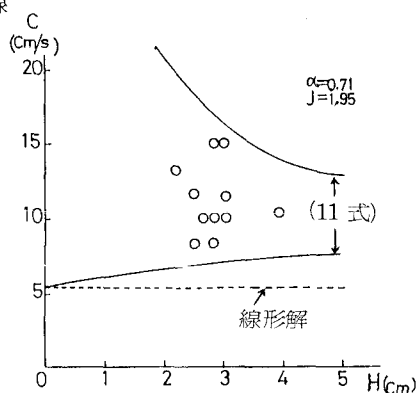


図-4 波高Hと位相速度Cの関係