

広島大学工学部 正員 細田 尚

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

広島大学工学部 正員 余越正一郎

1. 序 論

本研究は、まず直交曲線座標系での k - ϵ 方程式を誘導する。得られた基礎式を round jet に適用し、 k - ϵ モデルの定性的な特性、すなわち、特性量の分布形の相似性を仮定したときの、噴流軸上の流速 U_m 、乱れエネルギー k_m 、エネルギー散逸率 ϵ_m 、噴流幅 b の減衰率を求め、 k - ϵ モデルの有効性を検討した。

2. 直交曲線座標系での k - ϵ 方程式

Navier-Stokes 方程式は、直交曲線座標系で次のようになる。

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p + 2\nu \nabla_j e^{ij}, \quad e^{ij} = \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (1)$$

ここに、 v^i ；流速ベクトル $\mathbf{v}$ の反変成分， p ；圧力， g^{ij} ；計量テンソルの反変成分， ∇_j ；共変微分を表わす。

(以後、上付添字は反変成分，下付添字は共変成分を示す。)

(1) 式より Reynolds 方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial t} + \bar{v}^j \nabla_j \bar{v}^i + \nabla_j \bar{v}^{ij} \bar{v}^{ij} = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j \bar{p} + 2\nu \nabla_j \bar{e}^{ij} \quad (2)$$

(1) 式より (2) 式を引いて、変動流速に関して

$$\frac{\partial v^{i'}}{\partial t} + v^i \nabla_j \bar{v}^i + \bar{v}^j \nabla_j v^{i'} - \nabla_j \bar{v}^{ij} v^{i'} + \nabla_j v^{i'} \bar{v}^{ij} = -\frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p' + 2\nu \nabla_j e^{ij'} \quad (3)$$

が得られ、上式に $v^{i'}$ を乗じて縮約し、時間平均をとれば、乱れエネルギー $k = \frac{1}{2} \overline{v^{i'} v^{i'}}$ に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}^j \nabla_j k &= -g_{ii} \overline{v^{i'} v^{i'}} \nabla_j \bar{v}^i - \nabla_j \left[\overline{v^{i'} \left(k' + \frac{p'}{\rho} \right)} \right] \\ &\quad - 2\nu \left(g_{ii} \nabla_i (\overline{v^{i'} e^{ij'}}) - g_{ii} \overline{v^{i'} \nabla_j e^{ij'}} \right) + 2\nu g_{ii} \nabla_j (\overline{v^{i'} e^{ij'}}) \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。エネルギー散逸率は

$$\epsilon = \nu \left[g_{ii} \nabla_j (\overline{v^{i'} e^{ij'}}) - g_{ii} \overline{v^{i'} \nabla_j e^{ij'}} \right] = \nu \left[\overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}} + g_{ii} g^{jj} \overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}} \right] \quad (5)$$

で定義され、 $\overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}} = \overline{v^i \nabla_j v^{i'} v^{i'}}$ であるから $\overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}} \ll \overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}}$ と考えて、通常

$$\epsilon \approx \nu g_{ii} g^{jj} \overline{v^i v^{i'} \nabla_j v^{i'}} \quad (6)$$

と近似される。そこで、(3) 式に ∇_k を作用させ、 $\nu g^{kk} \nabla_k v^{i'}$ を乗じて縮約することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v}^j \nabla_j \epsilon &= -2\nu \left(g^{kk} g_{ii} \overline{\nabla_k v^{i'} \nabla_k v^{i'}} + g^{ij} g_{kk} \overline{\nabla_j v^{k'} \nabla_i v^{k'}} \right) \nabla_j \bar{v}^i \\ &\quad - \nabla_j \left[\overline{v^{i'} \epsilon'} + 2\nu g^{kk} \overline{\nabla_k v^{i'} \nabla_k \frac{p'}{\rho}} \right] - 2\nu g^{kk} g_{ii} \overline{\nabla_k v^{i'} \nabla_j v^{i'} \nabla_k v^{i'}} - 2\nu^2 g^{kk} g_{ii} g^{jj} \left(\overline{\nabla_j \nabla_k v^{i'}} \right)^2 \\ &\quad - 2\nu g^{kk} g_{ii} \overline{v^{i'} \nabla_k v^{i'} \nabla_j \nabla_k v^{i'}} + \nu g^{ij} \nabla_j \nabla_j \epsilon \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。 k - ϵ モデルでは、渦動粘性係数 D を乱れ強さのスケールと乱れの空間的スケールの積として表わすとき、乱れ強さのスケールとして $\sqrt{k}$ 、乱れの空間的スケールとして $\sqrt{k^3}/\epsilon$ を考え、 $D = c_\mu k^2/\epsilon$ とし、Reynolds 応力を次のように表わす。

$$-\overline{v^i v^j} = 2D \bar{e}^i \bar{e}^j - \frac{2}{3} k \delta^{ij} \bar{e}^k \bar{e}_k \quad (8)$$

さらに、 k, ϵ の方程式の各項を D を用いて表わして¹⁾、 k, ϵ の基礎式として次式を用いる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j k = 2D \bar{e}^i \bar{v}_j \bar{v}^i \bar{e}_i + \bar{v}_j \left(\frac{D}{\sigma_k} g^{ij} \bar{v}_j k \right) - \epsilon \quad (9)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j \epsilon = -c_{\epsilon 1} \frac{g^{ij} \bar{v}^i \bar{v}^j}{k} \epsilon \bar{v}_j \bar{v}^i + \bar{v}_j \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} g^{ij} \bar{v}_j \epsilon \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (10)$$

3. round jet の特性

連続式、Reynolds 方程式、 k - ϵ 方程式に $g_{xx}=1, g_{rr}=1, g_{\theta\theta}=r^2$ を代入して、 $\partial/\partial\theta=0$ と静水圧分布の仮定を行い、さらに、流れ方向の変化のスケールが半径方向の変化のスケールに比べて十分大きいとして Ordering Analysis を行えば次のようになる。(Fig.1 参照)

$$\frac{\partial}{\partial x} U_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0 \quad (11)$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \quad (12)$$

$$U_x \frac{\partial k}{\partial x} + U_r \frac{\partial k}{\partial r} = D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - \epsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (13)$$

$$U_x \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + U_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \quad (14)$$

分布形が自己相似のとき

$$U_x = U_m f(\eta), k = k_m g(\eta), \epsilon = \epsilon_m h(\eta) \quad (\eta = r/b)$$

$$U_m \propto \xi^p, b \propto \xi^q, k_m \propto \xi^r, \epsilon_m \propto \xi^s \quad (\xi = x/b_0)$$

とおけば、次元考察により

$$p + q = 0, \quad p - 2q - 2r + s = 1 \quad (15)$$

$$p - 2q + r - s = -1, \quad p + r - s = 1$$

が得られ、その結果

$$U_m \propto x^{-1}, b \propto x^1, k_m \propto x^{-2}, \epsilon_m \propto x^{-4} \quad (16)$$

となる。減衰のべきを、著者が求めた二次元 jet の²⁾の²⁾とあわせて、Table 1 に示した。表には、渦動粘性係数で定義した Reynolds 数 $Re_D = U_m b / c_\mu \left(\frac{k}{\epsilon} \right)$ も示したが、いずれも 0 となり、 Re_D は流下が進んでも一定となっている。また、 U_m, b に関しては、従来より実験的に示された値と一致しており、 k - ϵ モデルの有効性が示された。

参考文献

- 1) Hanjalic, Launder ; J.F.M., Vol. 52, 1972
- 2) 岩佐, 細田, 松井 ; 土木学会第38回年次講演会概要集, 1983

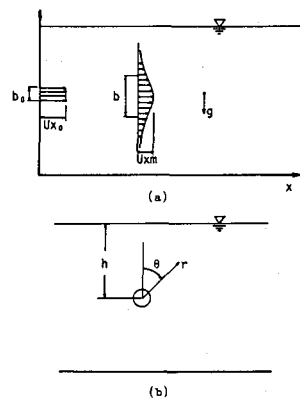


Fig. 1 座標系

	slot	round
U_m	-1/2	-1
b	1	1
k_m	-1	-2
ϵ_m	-5/2	-4
Re_D	0	0

Table 1 減衰のべき