

防災研究協会 正会員 山野 邦明, 立命館大学理工学部 正会員 大同 淳之
立命館大学大学院 学生員 〇三輪 浩, 京都大学大学院 学生員 西本 直史

1. はじめに. 従来, Newton 流体を含む粒子流の構成方程式は, 主に, 運動量の伝達を用いて求められてきた. 著者らは, 以前, 粒子間の摩擦を考慮して流動時の散逸エネルギーを求め, 構成方程式を決定した¹⁾が, Newton流体を含む粒子流のエネルギー散逸機構を十分に説明してはいなかった. 本報では, 散逸エネルギーが構成方程式に対してはたす役割を示し, 流れのどのような諸量が, どのように散逸機構に関係しているかについて考察する. そして, 具体的な適用例として, Bagnold のモデルをもとに構成方程式を求め, 実験値と比較する.

2. エネルギー散逸と構成方程式. 粒子流を連続体として取り扱うとき,

流れの種々の性質は図1のような過程で求められる. そして, 得られる構成方程式は一般に次のように表わすことができる.

$$\mathcal{I} = -p\mathcal{E} + f(I_1, I_2, I_3)\mathcal{D} \equiv \mathcal{F}_N + \mathcal{F}_D \quad \text{--- (1)}$$

ここで, $\mathcal{I}$ は応力テンソル, p は圧力, $\mathcal{E}$ は単位テンソル, f はスカラー関数, $\mathcal{D}$ は歪速度テンソル, I_1, I_2, I_3 は $\mathcal{D}$ の 1 次, 2 次, 3 次の不変量, である. (1) 式の第 1 項は, 等方な非散逸応力である圧力, 第 2 項は,

散逸応力であり, (1) 式で表わされる流体が流動するとき, 単位時間, 単位体積当り, $\Phi = \text{Tr}(\mathcal{F}_D \cdot \mathcal{D}) = f(I_1, I_2, I_3) \text{Tr}(\mathcal{D} \cdot \mathcal{D})$ --- (2) なる

エネルギー散逸を生ずる. (2) 式が $\mathcal{D}$ の n 次式であれば, $\mathcal{F}_D = 1/n \cdot \partial \Phi / \partial \mathcal{D}$ --- (3) が成り立つ. 従って, エネルギー散逸 Φ を求めれば, 構成方程式は決定されることがわかる. 実際の粒子流においては, たとえば, 開水路二次元重力流動において観察されるように, 外部からのエネルギーの供給(この場合は, ポテンシャルエネルギー)がなくなれば(路床勾配 $\theta = 0$), 粒子濃度が増加し, ついに停止する. このことは, 粒子流が“圧縮性”であることを示しており, 外部からのエネルギーの供給がなければ, エネルギーを散逸しながら圧縮してゆくことを示している. このような, エネルギーの体積散逸は, ミクロ的には, 二粒子の衝突において反発係数 e が 1 よりも小さいことで説明される. なぜなら, 二粒子の衝突において, (a), もし, $e = 1$, 粒子の摩擦係数 $\mu = 0$ ならば, 粒子が衝突前にもっているエネルギーは保存されるため, $\Phi = 0$, 従って $\mathcal{F}_D = 0$. (b), もし, $e = 1$, $\mu > 0$ ならば, 粒子間摩擦によるエネルギー散逸はあるが, 衝突に関する相対速度は保存されるため, 流れは非圧縮性となり, せん断散逸として評価される. (c), ところが, $e < 1$, $\mu = 0$ ならば, 衝突に関する相対速度が保存されないため, 粒子のもつ運動エネルギーも保存されず, 粒子間隔も小さくなるため, 体積散逸として評価されるからである. 実際の流れの中では, エネルギー散逸は, 粒子の非弾性衝突・粒子と流体間の摩擦・粒子間摩擦によって生じるが, 粒子と流体間の摩擦は, 粒子個々の運動をマクロな流れに従属させるように働くので, e に含ませ, μ による散逸が e による散逸に比べて小さいと仮定して, 全体のエネルギー散逸を e のみで評価することにする. 定常な状態においては, 粒子濃度の変化がないため“非圧縮性”を示しているように思われるが, この状態は, “非圧縮性”を示しているのではなく, 流れが圧縮されない状態を表わしており, ミクロ的には, 粒子の衝突によるエネルギーの体積散逸が生じている. ただ, マクロな流れの数理モデルとしての構成方程式においては, 体積散逸として評価できず, 式の上では, せん断散逸として評価される.

3. Bagnold のモデルを用いた構成方程式. この考え方を定常な二次元せん断流れに適用するため, Bagnold のモデルを用いて構成方程式を導く. 粒子の配列は Bagnold と同様に図 2 のように定める. 一回の衝突で失なうエネルギーは, $\frac{1}{2}(1-e^2)(\frac{1}{6}\pi D^3)\sigma (du \sin \alpha_i)^2$ --- (4) で表わされる. ここで, α_i は, 粒子の衝突角であ

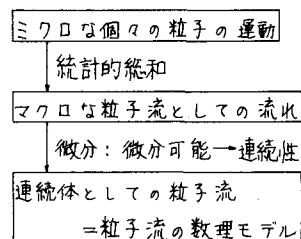


図1. 粒子流の解析手法

る。単位時間当りの衝突回数は、 $\xi = du/bD$ --- (5) で表わされ、粒子一個の占有体積が $(bD)^3$ であることから、粒子の衝突による単位時間・単位体積当りのエネルギー散逸率は、 $du = bD (du/dz)$ より、

$\Phi = \pi/12 (1-e)^2 \sin^2 \alpha_i \sigma \frac{1}{b} D^2 (du/dz)^3$ --- (6) と表わされる。また、非散逸なエネルギーは圧力に相等するので、結局、構成方程式は、

$$p = Ae^2 \sigma \frac{1}{b} D^2 (du/dz)^2 \quad \text{--- (7)}$$

$$\tau = A(1-e^2) \sigma \frac{1}{b} D^2 (du/dz)^2 \quad \text{--- (8)}$$

と求まる。ただし、 $A = \pi/12 \sin^2 \alpha_i$ である。内部摩擦角は、 $\tan \phi = \tau/p = \frac{1-e^2}{e^2}$ --- (9) と表わされ、みかけ上定数となる。しかし、 e は流体摩擦を含むため、一般には濃度の関数である。

4. Couette 流、及び、開水路流れの実験との比較。図3は、Gravity free Couette 流の実験との比較で、(8) 式に流体相の応力¹⁾ $\tau = (1+\lambda)\eta_0$ 、 η_0 ；液体の粘性係数 --- (10) を加え、Bagnold と同様の無次元化を行な、たものである。これから、(8) 式の係数 $A(1-e^2) = 3.4 \times 10^{-2}$ が得られる。また、限界無次元びすみ速度（限界 Re 数）は、約 30 であり、これより大きいところでは粒子の慣性力が、小さいところでは流体の粘性力が卓越する。図4は、開水路における実験との比較で、(8) 式を積分して抵抗則で表現したものである。固定床に比べ移動床のばらつきが大きく、少しの条件の違いでかなり抵抗が異なるのがわかる。また、固定床における(8) 式の係数は、0.59 となり、Couette 流に比べ1オーダーの違いがある。

5. あとがき。Newton 流体を含む粒子流のエネルギー散逸機構に注目し、粒子の非弾性衝突による体積散逸が重要であることを示した。そして Bagnold のモデルを用いて、せん断流における構成方程式を導き、実験と比較した。

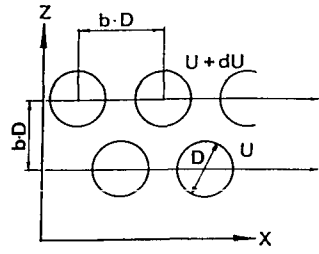


図2. 粒子の配列モデル

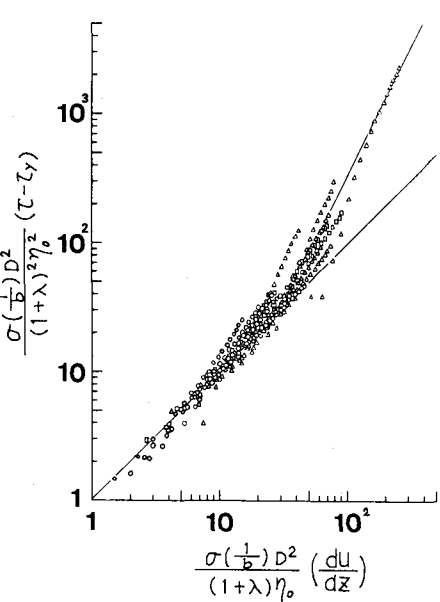


図3. Couette 流れの無次元表示

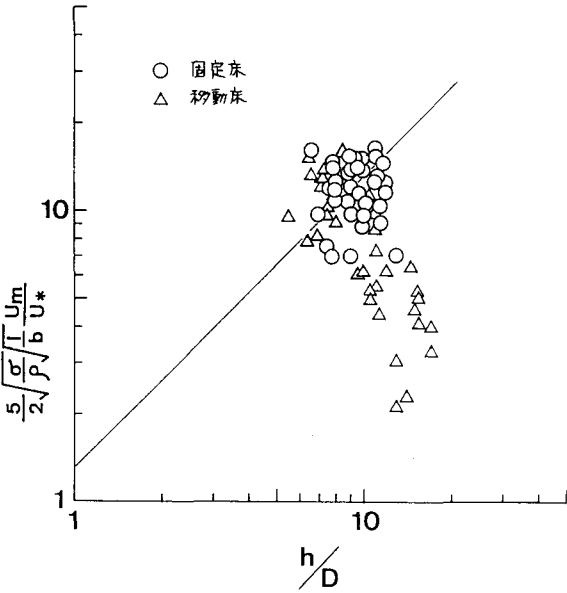


図4. (8) 式による開水路流れの抵抗則

参考文献

1). 大同・加藤・山野；流体を含む粒子流の流動機構に関する研究(2)，第34回年講，1979，pp.139～140
 2). R.A. Bagnold；Proc. Roy. Soc. A, Vol. 225. P.p.49～63，1954