

京都大学大学院 学生員 篠田成郎

京都大学防災研究所 正員 土屋義人

岐阜大学工学部 正員 安田孝志

1. 緒言

海岸波浪はその不規則性と非線形性によって特色づけられているため、それを力学的に取り扱う場合、その素励起を力学的に決定し、これに対して確率の概念を導入することが必須となる。非線形波動解であるソリトン素励起として海岸波浪を記述する¹⁾扱いは、海岸波浪の不規則性を支配する確率構造はソリトンの固有値の出現確率を表す固有値分布を基礎として²⁾いる。したがって、海岸波浪はこの確率構造およびソリトン素励起とした力学構造の両者によって評価される。すなわち、ソリトンモードに基づく海岸波浪は、ソリトンの固有値分布を基礎とした確率的実現であると考えられ、海岸波浪の状態を評価する上で、固有値分布を知ることが必須となる。不規則波の波形記録が与えられた場合、これをソリトンの連なりとして解析し、個々のソリトンの固有値を求めることにより、これらの頻度分布である固有値分布を得ることができるとは。しかしながら、ソリトンの固有値分布を基礎とする確率的実現として海岸波浪が存在する以上、その ensemble の特性と固有値分布とは一対一の対応関係を有しており、海岸波浪の ensemble に関する情報のみからソリトンの固有値分布を決定することが可能となる。本研究では、以上の観点より、海岸波浪の水位変動に関する理論分布を導くと同時に、この結果を用いて、水位変動の標本分布が既知となった場合のソリトンの固有値分布の推定法を提案し、この方法によって得られる固有値分布の精度について検討する。

2. 水位変動の確率密度関数 まず、波群が重なり合っており、相互干渉を無視できる場合の水位変動の確率密度関数がソリトンの固有値分布を用いて表示されることを示す。ただし、以下では、ソリトンの波谷面を基準にした変動水位変動として取り扱う。ソリトンモードに基づく海岸波浪の時間波形は次式で表される。

$$\eta(t^*) = \sum_{j=1}^N \eta_j(t^*) + \eta_0, \quad \eta_j(t^*) = A_j \operatorname{sech}^2 \delta_j, \quad \delta_j = \sqrt{3A_j/4} C_j(t^* - \delta_j), \quad C_j = 1 + A_j/2 - 3\eta_0/2, \quad \eta_0 = -(2/\tau^*) \sum_{j=1}^N \sqrt{A_j/3} \tanh \delta_j \Big|_0^{\tau^*} / C_j \quad (1)$$

ここに、 A_j ；各ソリトンの固有値、 δ_j ；各ソリトンの位相、 N ；ソリトンの個数、 τ^* ；無次元時刻、 τ^* ；海岸波浪の無次元観測時間および η_0 ；波谷面と平均水面との水面差である。今、対象とする不規則波のサンプリング間隔を Δt^* とすると、水位変動 $\eta(t^*) + \eta_0$ の全標本数 N_T および $\eta(t^*) + \eta_0$ がある水位より小なる標本数 $N_T(\zeta)$ は、Gauss 記号 $[\]$ を用いて、それぞれ次式で与えられる。

$$N_T = [\tau^*/\Delta t^*] + 1, \quad N_T(\zeta) = \left[\tau^* - 2 \sum_{j=1}^N (\eta_j^{-1}(\zeta) - \delta_j) \right] / \Delta t^* + 1, \quad \eta_j^{-1}(\zeta) = \delta_j + (2/\sqrt{3A_j} C_j) \ln \{ (1 + \sqrt{1 - 3/A_j}) / \sqrt{3/A_j} \} \quad (2)$$

ここに、 $\eta_j^{-1}(\zeta)$ は j 番目のソリトンの波形 $\eta_j(t^*)$ の逆関数であり、この誘導に際して、 $t^* \geq \delta_j$ および $\zeta \leq A_j$ を仮定した。さて、水位変動 $\eta(t^*) + \eta_0$ の確率分布関数 $F_T(\zeta)$ は、確率分布関数の定義より、 $\eta(t^*) + \eta_0$ がある水位より小なる確率 $\Pr[\eta(t^*) + \eta_0 \leq \zeta]$ で表される。すなわち、式(2)を用いれば、 $F_T(\zeta)$ は次のように導かれる。

$$F_T(\zeta) = \Pr[\eta(t^*) + \eta_0 \leq \zeta] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ N_T(\zeta) / N_T \right\} = 1 - (4/\tau^*) \sum_{j=1}^N (1/\sqrt{3A_j} C_j) \ln \{ (1 + \sqrt{1 - 3/A_j}) / \sqrt{3/A_j} \} \quad (3)$$

ここで、確率変数の関数に関する期待値演算の考え方を導入して、上式をソリトンの固有値分布 $p(R)$ を用いた表示に置き換えると、次式の確率分布関数 $F_T(\zeta)$ が得られる。

$$F_T(\zeta) = 1 - (4N/\tau^*) \sum_{R=1}^R p(R) / \sqrt{3\tilde{A}_R} \tilde{C}_R \ln \{ (1 + \sqrt{1 - 3/\tilde{A}_R}) / \sqrt{3/\tilde{A}_R} \}, \quad \tilde{C}_R = 1 + \tilde{A}_R/2 - 3\eta_0/2 \quad (4)$$

ここに、 R ；確率関数 $p(R)$ の階級の数および $\tilde{A}_R$ ；確率関数 $p(R)$ における R 番目の階級値である。さらに、上式を ζ で微分することにより、水位変動 $\eta(t^*) + \eta_0$ の確率密度関数 $f_T(\zeta)$ を得る。

$$f_T(\zeta) = dF_T/d\zeta = (2N/\tau^*) \sum_{R=1}^R p(R) (1 + \sqrt{1 - 3/\tilde{A}_R}) / \{ \sqrt{3\tilde{A}_R} \tilde{C}_R (1 - 3/\tilde{A}_R + \sqrt{1 - 3/\tilde{A}_R}) \cdot \zeta \} \quad (5)$$

この式より、波群が重なり合っていない場合には、ソリトンの固有値分布 $p(R)$ を与えれば、直ちに水位変動の分布を知ることが可能となる。また、ソリトンの固有値分布の時空間的な不変性が理論的に保証されているため、

ソリトンモードにおける水位変動の分布も仮播に対して不変であると言える。

3. 水位分布によるソリトンの固有値分布の推定法

ついで、以上の結果をもとに、水位変動 $\eta(t) + \eta_0$ の標本分布が既知となった場合のソリトンの固有値分布の推定法について述べる。今、水位変動の標本分布において、 l 番目の階級に対する相対度数を F_l 、 l 番目の階級の下限および上限値をそれぞれ z_l および z_{l+1} とすれば、相対度数 F_l は、式(4)の確率分布関数の差として次式で表される。

$$F_l = F_Y(z_{l+1}) - F_Y(z_l) = 4n \sum_{k=1}^R p_k S_{lk}, \quad n = N/T^*, \quad p_k = p(k),$$

$$S_{lk} = (1/\sqrt{3\tilde{A}_k} C_k) \ln \left\{ (1 + \sqrt{1 - z_l/\tilde{A}_k}) / (1 + \sqrt{1 - z_{l+1}/\tilde{A}_k}) \cdot \sqrt{z_{l+1}/z_l} \right\}, \quad \eta_0 = \int_0^\infty f_Y(z) dz, \quad k=1, \dots, R, \quad l=1, \dots, R \quad (6)$$

これより、ソリトンの固有値分布 $p(k)$ を求める問題は、 R 元連立方程式と解く問題に帰着し、その解は次式で与えられる。

$$P = \frac{1}{4n} S^{-1} F, \quad P = [p_k], \quad S = [S_{lk}], \quad F = [F_l] \quad (7)$$

ここに、 P ; p_k ($k=1, \dots, R$) を成分とする R 次の列ベクトル、 S ; S_{lk} ($l=1, \dots, R, k=1, \dots, R$) を成分とする R 次の正方形列および F ; F_l ($l=1, \dots, R$) を成分とする R 次の列ベクトルである。式(7)より、単位時間内に存在するソリトンの個数 n および水位変動の標本分布 F_l ($l=1, \dots, R$) が既知となれば、ソリトンの固有値分布を一義的に求めることができる。

4. 現地波表による適用性の検証

京都大学防災研究所附属大湊波浪観測所において得られたうねり性の現地波浪の観測記録に対して、式(5)および(7)の適用性を検討する。図-1は、波谷面を基準とした水位変動の標本分布と式(5)を用いて得られた理論分布とを比較したものである。隣接するソリトンの影響を無視しているために、ソリトンの波谷部分に相当する約0.08以下の水位変動値について両者の間に若干の差異が認められるものの、全体的には、両者は良く一致していると言える。これより、式(5)による水位分布の表示精度は十分満足できるものであり、海岸波表がソリトンの固有値分布を基礎とする確率的実現であるとの考えが正鵠を得たものと判断できる。図-2は、この現地波浪の観測記録をソリトン分解して得られた固有値の標本分布と式(7)によって推定した固有値分布とを比較したものである。ただし、両者とも、固有値とその平均および標準偏差を用いて正規化した確率変数 α の分布として示した。これより、 α の値が-0.1から0.0の比較的小さな固有値に対して理論分布が過大な値を与えており、必ずしも両者は良好に対応しておらず、これは、小さなソリトンほど隣接するソリトンの影響を受けることに起因しているためと考えられる。しかしながら、他の部分については固有値の標本分布と式(7)による

理論分布とがほぼ一致しているため、隣接ソリトンの影響を無視しうるほど波峰間隔の大きな不規則波表に対しては、この方法によるソリトンの固有値分布の推定が有効になると思われる。

5. 結 語

以上、海岸波表がソリトンの固有値分布を基礎とする確率的実現であるとの観点から、その水位変動に関する理論分布を導き、その適用性が極めて良好なものであることを示すと同時に、水位変動の標本分布を用いてソリトンの固有値分布を推定する方法を提案した。しかしながら、その適用性を明らかにすることはできず、小さなソリトンに対する隣接ソリトンの影響を考慮した扱いが今後の課題として残された。

参考文献 1) 安田孝志・藤田成郎・土屋教人: ソリトンスパトル理論による海岸波浪の内部特性表示, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 36-40, 1982.

2) 土屋教人・安田孝志・藤田成郎: ソリトンスパトル理論による海岸波浪の統計的特性, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 69-73, 1983.

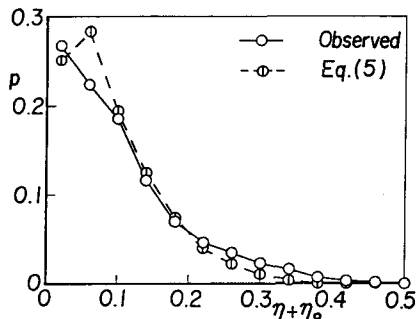


図-1 水位変動に関する標本分布と理論分布との比較

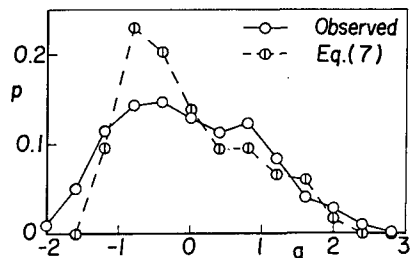


図-2 ソリトン固有値の標本分布と水位分布による固有値分布の推定結果との比較