II-120　波動解析のための境界型有限要素法

中央大学　学生員　○樫山　和男
中央大学　学生員　　桜井　英行
中央大学　正　員　　川原　睦人

1．はじめに

著者らは既に，波動場解析において，従来の差分法や有限要素法よりも精度のよい新しい有限要素法を提案した[1]。この方法は，補間多項式として，基礎方程式の解を満足する式を用いる有限要素法である。このため，問題に対する汎関数は要素境界上の線積分のみで記述されるという，従来の有限要素法にはない興味深い形となっている。このことから，この方法を"境界型有限要素法"とした。

本報告は，境界型有限要素法の誤差特性を，3角形要素と4角形要素について他の数値解法との比較によって示し，応用例として，湾の自由振動問題に本手法を適用した例について述べるものである。

2．境界型有限要素法

流体は非圧縮，非粘性，非回転として，2次元微小振幅波を取り扱う。現象は時間的に調和であると仮定すると，表面波の基礎方程式は，次のヘルムホルツ方程式で表わされる。

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

ここで，ϕは2次元のポテンシャル関数，kは波数である。また，Ωは解析領域である。境界条件としては，ポテンシャル関数ϕ，および境界に対して外向き法線方向のϕの微分値ϕ_nが導入される。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2) \qquad \phi_n = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \hat{\phi}_n \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ここで，Γ_1，Γ_2はそれぞれϕ，ϕ_nが与えられる境界を表わし，^はその既知量を表わす。

境界型有限要素法を適用するにあたり，変分原理を導入する。基礎方程式と境界条件式とに等価な汎関数は，

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\phi)^2 d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega k^2\phi^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2}\phi\hat{\phi}_n d\Gamma \tag{4}$$

ここで，右辺第1項を部分積分して，基礎方程式の解を満足する補間多項式を用いると，次式のように汎関数が要素境界上の線積分のみで記述されることになる。

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Gamma \phi\phi_n d\Gamma - \int_{\Gamma_2}\phi\hat{\phi}_n d\Gamma \tag{5}$$

要素としては，3節点3角形要素と4節点4角形要素を用い，補間多項式としては次式を用いる。

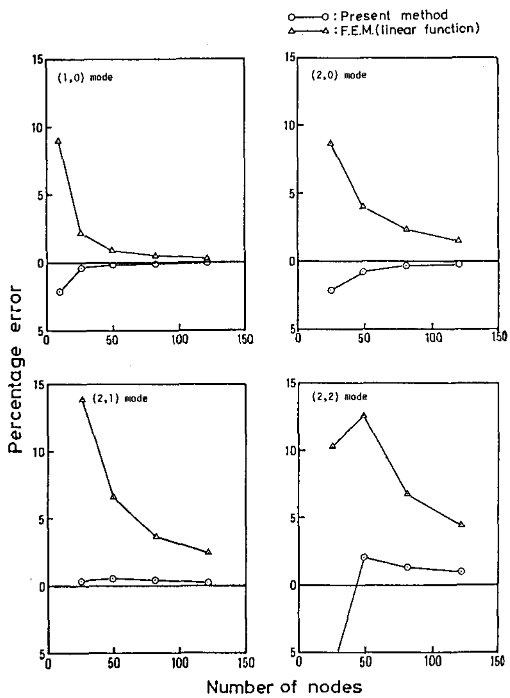
$$\phi = \alpha_1\cos\frac{k}{\sqrt{2}}x\cos\frac{k}{\sqrt{2}}y + \alpha_2\cos\frac{k}{\sqrt{2}}x\sin\frac{k}{\sqrt{2}}y + \alpha_3\sin\frac{k}{\sqrt{2}}x\cos\frac{k}{\sqrt{2}}y \qquad \text{(3節点3角形要素)} \quad (6)$$

$$\phi = \alpha_1\cos\frac{k}{\sqrt{2}}x\cos\frac{k}{\sqrt{2}}y + \alpha_2\cos\frac{k}{\sqrt{2}}x\sin\frac{k}{\sqrt{2}}y + \alpha_3\sin\frac{k}{\sqrt{2}}x\cos\frac{k}{\sqrt{2}}y + \alpha_4\sin\frac{k}{\sqrt{2}}x\sin\frac{k}{\sqrt{2}}y \qquad \text{(4節点4角形要素)} \quad (7)$$

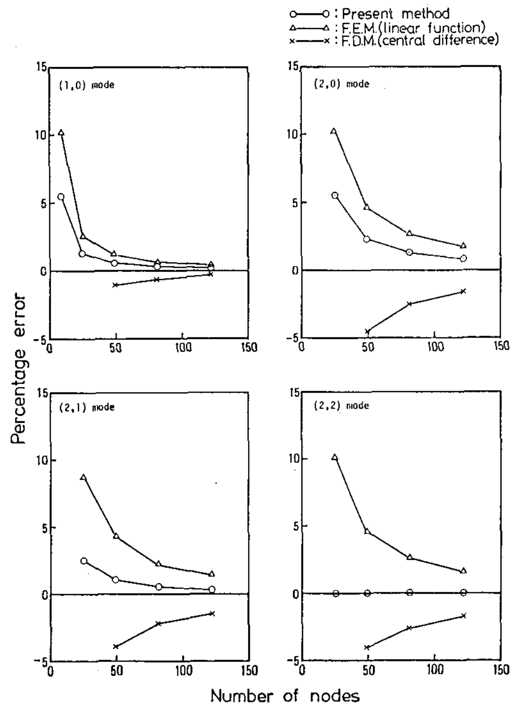
ここで，α_1～α_4は未定定数，x，yは要素内の任意の座標，kは波数である。(6)，(7)式を用いて，(5)式の汎関数を停留にするポテンシャル関数ϕを見いだすことを考える[1]。

3．本手法の有効性の検証

本手法の有効性を検証するために，長方形湖の自由振動問題を例にとり，理論解および他の数値解法による結果との比較を行った。いま，一様水深をもつ100m×100mの正方形湖を考え，節点数をいろいろと変化させて，各振動モード(m，n)における固有値の計算を行った。境界条件は，陸岸の法線方向に関して$\partial\phi/\partial n = 0$とした。図－1が3節点3角形，図－2が4節点4角形要素の場合の節点数と固有値誤差の関係をそれぞれ示したものである。横軸には節点総数，縦軸には固有値誤差をとっている。図中，○印は本手法による固有値誤差，△印は線形の補間関数を用いた有限要素による固有値誤差，×印は中央差分による固有値誤差である。図より，本手法は他の数値解法に比べて，誤差が非常に小さいことがわかる。



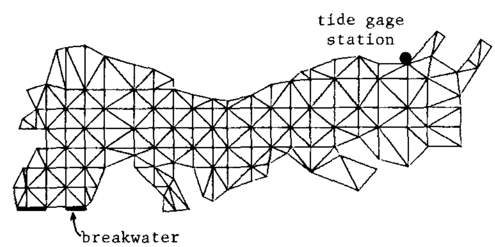
図－1　節点数と固有値誤差の関係（3角形要素）



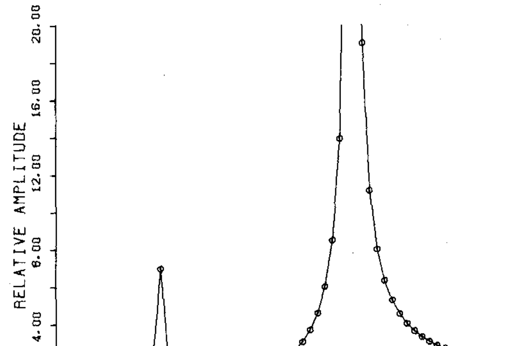
図－2　節点数と固有値誤差の関係（4角形要素）

4．応用計算例

3．で本手法の有効性が確認されたので，ここでは，応用数値計算例として，湾の自由振動問題に本手法を適用して，固有周期を求めることを考える。適用例として，図－3に示す大船渡湾を解析した。解析は湾内を3節点3角形の境界型有限要素で分割して行った。計算条件としては，入射波の周期を1分から60分まで1分毎に変化させて行い，境界条件としては，入口の節点で水位$\phi = 1.0$と仮定した。検潮所の地点における計算された相対振幅を図－4に示す。図より，大船渡湾における固有周期が約14分付近と約40分付近にあるのがわかる。これは，現地の静振観測の結果[2]と非常に良い一致を示している。



図－3　大船渡湾の要素分割図



図－4　検潮所における振幅増幅率

5．おわりに

本報告によって，本手法による固有値誤差は，従来の差分法や有限要素法によるよりも小さく，これらの方法と同じ固有値誤差を許容するならば，節点総数を半分以下に減らすことができることが示された（図－1，2）。このため，従来に比べて，計算時間，計算機容量の点でかなりの向上が図られ，本手法は，湖や湾などの振動特性の解析には，きわめて有効な方法であるといえる。

参考文献 1）樫山，川原：波動解析のための境界有限要素法について，第38回年講，1983，pp295-296
2）清川，西村：津波防波堤の効果について，第16回海講，1969，pp365-369