

中央大学 学生員 安重 晃
前田建設 正 員 三輪 俊彦
中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

河川や海洋のように、土木工学で問題となる流れには、自由表面を有する場合が多い。しかし、これらの現象を解析しようとする際、解析が複雑になるため自由表面が除外されているのが現状であった。ここでは、自由表面を持つ流れについての有限要素解析について考察する。

流体の運動を記述する方法として、オイラー法とラグランジュ法という2つの方法があるが、すでに着者はオイラー的手法による孤立波の解析を行い妥当性を検討した。今回は、オイラー法より自由表面の取り扱いが簡単なラグランジュ的手法による解析を検討する。

2. 基礎方程式

取り扱う領域は、鉛直2次元平面とする。基礎方程式は Navier-Stokes の運動方程式と連続方程式である。ラグランジュ的手法を用いると、それぞれ次のように表わすことができる。

$$\dot{U}_i = \rho (U_{ij} + U_{ji})_{,j} + \frac{1}{\rho} P_{,i} - F_i = 0 \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで“ $\dot{}$ ”は実質微分を表わすものである。

上の(1),(2)式をガラーキン法の手順に従い有限要素方程式を導くと次のようになる。

$$M_{ij} U_{,i}^{n+1} + \Delta t \cdot \rho \cdot S_{ij} U_{,i}^{n+1} - \Delta t \cdot \frac{1}{\rho} H_{ij} P_{,j}^{n+1} = M_{ij} U_{,i}^n + \Delta t F_{ij} \quad (3)$$

$$H_{ij} U_{,i}^{n+1} = 0 \quad (4)$$

ここで、流速については2次、圧力については1次の近似関数を用いている。

3. ラグランジュ的手法について

ラグランジュ法を用いた場合、水粒子の流速およびその位置が未知量となる。実際の数値計算では(3),(4)式を解いて流速を求めながら繰返し計算を行い、水粒子の位置を定めるような方法を用いている。そのアルゴリズムを次に示す。

(i) 位置 X^n , 流速 U^n に初期値を与える。

(ii) $n+1$ 回目の位置の近似値 $\tilde{X}^{n+1(k)}$ を推定する。

$$\tilde{X}^{n+1(k)} = X^n + \Delta t \cdot U^n$$

(iii) 推定値 $\tilde{X}^{n+1(k)}$ を用いて(3),(4)式を解き、流速と圧力の近似値 $\tilde{U}^{n+1(k)}$, $\tilde{P}^{n+1(k)}$ を求める。

(iv) 位置の誤差 $\Delta X^{n+1(k)}$ を下のように定める。

$$\Delta X^{n+1(k)} = \tilde{X}^{n+1(k)} - X^n - \Delta t \cdot \tilde{U}^{n+1(k)}$$

(v) この誤差 $\Delta X^{n+1(k)}$ が許容誤差内であれば

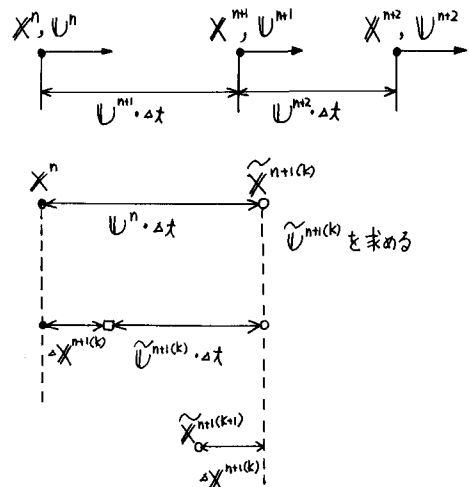
$$X^{n+1} = \tilde{X}^{n+1(k)}, \quad U^{n+1} = \tilde{U}^{n+1(k)}$$

として次の時間ステップへ計算を進める

(vi) $\Delta X^{n+1(k)}$ が許容誤差内になければ

$$\tilde{X}^{n+1(k+1)} = \tilde{X}^{n+1(k)} - \Delta X^{n+1(k)}$$

と推定した位置を修正して (iii) より繰返し計算を行う。



4. 数値計算例

水路長 16 m の水路に水深 1 m 初期波高 0.2 m の孤立波を Laitone の近似式により発生させ逐次追跡した。

計算条件として、水路の両側および水路底での垂直方向の流速をゼロとした。また、波の伝播が正確に追跡できているかという検証のため粘性による効果を無視した。

右図が初期条件であり、下図がそれより波が伝播していく様子をプロットしたものである。ここで、右壁へのかけ上がり高さ、およびそれまでの時間を理論値と比較すると、粘性の効果を無視したにもかかわらず、若干の減衰が見られた。

5. おわりに

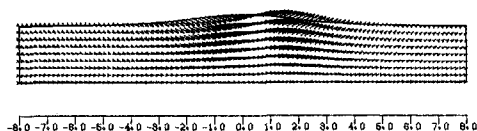
自由表面問題を解析する上での困難さはその解析領域が時間とともに変化することである。しかし、ラグランジュ的手法を用いれば、自由表面を特別に扱う必要はなく、その手順の中で自由表面の変化を追跡することができ、オイラー的手法より適用が簡単である。

水粒子の移動による有限要素の変形、およびそれに伴う誤差の混入に注意すれば、さらに適用範囲が広がるので、有効な手法であると考えられる。

FIG. MESH



FIG. VELOCITY



図・1 孤立波の初期条件

	かけ上がり高さ	到達時間
理論値	0.42 m	2.33 sec
解析値	0.39 m	2.45 sec

TIME = 1.25 SEC. STEP = 25. DEL-T. = 0.05 SEC.

FIG. MESH



FIG. VELOCITY

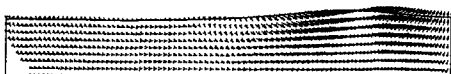
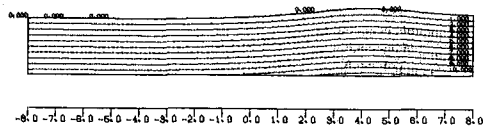


FIG. PRESSURE



図・2 25ステップ後の結果

TIME = 2.45 SEC. STEP = 49. DEL-T. = 0.05 SEC.

FIG. MESH



FIG. VELOCITY

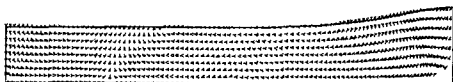
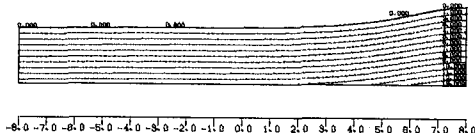


FIG. PRESSURE



図・3 49ステップ後の結果

<参考文献>

M. Kawahara & T. Miwa ; "Finite element analysis of wave motion",
International Journal of Numerical Method in Engineering , (in Press)