

1. はしがき: 波による質量輸送現象の説明は、波動場での底質の移動機構を探る上で不可欠なことであることから、これまでも実験と理論の両面からかなり活発に研究が進められてきていることは周知のとおりである。ことに粘性を考慮した Longuet-Higgins (1953) の研究はこの方面の先駆的研究として注目されてきたが、実験やものの困難性などもあって、必ずしも十分満足すべき結論が得られているとは言えない。特に実験条件の相違によって、理論値と実験値の差異が顕著であり、また解の適用限界と渦度の拡散の程度と質量輸送速度との関連性などについても、まだ大いに説明すべき余地があるように思われる。

本研究では、このような観点から、まず水平面上での従来の研究を再検討し、その問題点を整理するとともに、その解決方法を模索しようとするものである。ここでは主として、Longuet-Higgins の Conduction Solution について考察するが、特に表面境界層内に発生する渦度の拡散が質量輸送速度の分布特性に及ぼす影響については、彼自身の実験結果に基づいて議論する。

2. 質量輸送速度に関する従来の研究の問題点とその検討: 1) Conduction Sol. について: (a) 適用限界 ($\alpha \ll 1$) Longuet-Higgins は、渦度方程式から、波動場の主流領域の質量輸送速度の分布と支配する方程式と次式のように求めた。
$$E^* (\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z}) \bar{v} - \nu \nabla^2 (\bar{E} \bar{v} + \bar{E} \bar{v}_z + \bar{E} \bar{v}_x) = 0 \text{-----(1)}$$
 ここで、 $\bar{E} = \frac{1}{2} \omega$, ω : 波の振幅, L : 波長, $(\bar{u}, \bar{w})$: 水平及鉛直質量輸送速度, ν : 動粘性係数, $\delta = (\frac{\nu T}{L})^{1/2}$, $\alpha = \frac{\delta}{L}$, T : 周期, $\bar{v}_z$: 波動場における時間平均の流れ関数である。前述の $\alpha \ll 1$ という条件は、周知のように式(1)の1項 (convection term) と2項 (conduction term) の order の比較から1項 $\ll$ 2項として得られた結果であって、実際の普通の水槽内での実験条件下では、この条件はほとんど満足されない。しかしながら、Longuet-Higgins はこの条件を算出するにあたって、鉛直及水平方向の代表長を全く同じ波長 L の order と考えているが、現実的には、鉛直方向 (z) は水槽水深 (h) の order であって、 $h \ll L$ と考えてよい。従って、このような観点から、前述の適用限界を再検討すれば、 $\alpha \cdot \frac{h}{L} \ll 1$ ----- (2) により得られ、この式は現実的には長波の場合に成立するようになる。一般に、長周期波の場合、質量輸送速度の実験値の分布は Conduction Sol. と比較的同じ傾向を示す [平山 (1978)] ことから、式(2)により、従来より指摘されてきた Conduction Sol. の適用限界 ($\alpha \ll 1$) の矛盾は、多少緩和されることになる。

(b) 底面境界条件: Conduction Sol. は、底面境界条件として、底面境界層外縁での質量輸送速度そのものと採用している。したがって、Conduction Sol. の底面での質量輸送速度は、底面境界層外縁での結果と必然的に一致するが、一方、底面速度勾配については、両者は一致せず、それぞれ次式に示されるように表わされる ($z=h$: 底面の位置, $h = \frac{1}{2} \omega$)。 (境界層内の理論より) $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$ ----- (3), (Conduction Sol. より) $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{a^2 k}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \sinh 2kh + \frac{3}{kh} \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + 3 \right) \right\}$ ----- (4) したがって、いま、底面境界条件の1つとして、式(3)を採用して Conduction Sol. を解くとすれば、次の2つの場合が考えられる。すなわち、i) 境界条件に水面速度勾配 ($\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -4a^2 k^2 \cosh kh$) と式(3)を用いる場合、ii) 境界条件に底面質量輸送速度 ($\bar{v} = \frac{5a^2 k}{4 \sinh^2 kh}$) と式(3)を用いる場合、である。これらの結果は、それぞれ次式の(5), (6)のように表わされ、

$$\bar{v} = \frac{a^2 k}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + kh \sinh 2kh \left\{ 2 \frac{z}{h} \left(\frac{z}{h} - 2 \right) + \frac{4 \left(kh \right)^2 - 3}{3 \left(kh \right)^2} \right\} \right\} \text{----- (5)}$$

$$\bar{v} = \frac{a^2 k}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 - 3 \left(\frac{2kh + \sinh 2kh}{kh} \right) \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right\} \text{----- (6)}$$

なお、Conduction Sol. は境界条件として前述の底面質量輸送速度と水面速度勾配を用いた場合に得られたもので、次式のように表わされる (境界条件として式(4)と水面速度勾配を用いても全く同じ結果が得られる)。

$$\bar{v} = \frac{a^2 k}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 + kh \left(3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right\} \text{----- (7)}$$

図1にこれらの式(5)~(7)とRussell & Osorio (1957)の実験結果との比較を示す。この図から明らかのように、式(3)と考慮した上述の式(5),(6)の結果は、いずれも実験値の分布とその傾向と大いに異なっている。このように、底面境界条件の取り方によって、解の結果が異なるということから、境界層内外で底面速度勾配が不連続であるということは、Conduction Sol. に若干問題を残しているように思われる。

2)境界層内の渦度の拡散と質量輸送速度の分布特性との関連性: Longuet-Higgins (1960)は、水表面境界層から流体主流領域への渦度(ω)の拡散の経時変化について理論的に考察し、初期条件 $\omega = \begin{cases} 0; & z=0, & t < 0 \\ \omega_0; & z=0, & t > 0 \end{cases}$ の下での解と次式のように得ている。

$$1 - \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2\nu t}}} e^{-\theta^2} d\theta \quad \text{----- (8)}$$

ここで、 $\omega = \omega(z, t)$: 境界層外縁近傍における渦度、 ω_0 : 水面 $z=0$ での渦度、 $z = \frac{z}{\sqrt{2\nu t}}$ 、 z : 水面より下方にとった鉛直座標、 t : 時間、 ν : 動粘性係数、である。式(8)に基づいて、著者が図示したのは図2である。この図から、境界層からの渦度の拡散は非常に遅いことが明らかである。

一方、Longuet-Higgins⁹は、実験的に水面質量輸送速度の勾配を測定し、図3を得ている。この図から明らかのように、実験値(図中の実験点)は、次に示すStokesの理論(一実線)とLonguet-Higginsの理論値(破線)との間にはほぼ存在し、その分布曲線はそれぞれ次式のように表わされる。

$$(\text{実験曲線}) \quad \frac{\partial U}{\partial z} \bigg|_{z=h} \approx -3.2 a^2 k^2 \cosh kh \quad \text{----- (9)}$$

$$(\text{Stokesの理論値}) \quad \frac{\partial U}{\partial z} \bigg|_{z=h} = -2a^2 k^2 \cosh kh \quad \text{---- (10)}, \quad (\text{Longuet-Higgins}) \quad \frac{\partial U}{\partial z} \bigg|_{z=h} = -4a^2 k^2 \cosh kh \quad \text{----- (11)}$$

式(10)と式(11)の値の差が粘性による渦度に相当するものと考えられ、波の運動の初期段階では、水面速度勾配は式(10)で表示され、長時間経過して波の運動が定常になった状態では、式(11)で表わされることになる。従って、両者の過渡期においては、図3の実験結果からも明らかのように、水面速度勾配は式(10)と式(11)の間の値をとることになる。このことから著者は、Conduction Sol. の水面条件に、境界層内から発生する渦度の拡散の程度に応じて実験的に決定される係数 α ($0 \leq \alpha \leq 2.0$)を導入してConduction Sol. を解いた結果、次式を得た。

$$U = \frac{a^2 k}{4 \sinh kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 + \frac{1}{2} \alpha kh \left(3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \right\} \quad \text{----- (12)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \bigg|_{z=0} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right) a^2 k^2 \cosh kh \quad \text{----- (13)}$$

いま、 $\alpha=2.0$ のときには、式(12),(13)はそれぞれ式(7),(11)のLonguet-Higginsの理論結果に、 $\alpha=0$ のときには、式(12)はHuang (1970)の理論結果と一致し、また式(13)は式(10)のStokesの結果となる。一方、図3に示した実験値に基づく α の値は、 $\alpha=1.2$ となる。そこで、図4は、実験値に基づく式(12)の結果($\alpha=1.2$)と、Russellらの実験値及びConduction Sol. ($\alpha=2.0$)、Huangの結果($\alpha=0$)などと比較したもので、この図から、著者が示した式がConduction Sol. よりも若干実験値をよく説明しているように思われる。またHuangの式は結果的には水面境界条件に $\alpha=0$ のStokesの結果[式(10)]を手えたことになるので、水面での渦度の影響を無視していることになる。最後にご指導を賜った岩垣雄一京大教授、図面作成等に大いに助力をいただいた本田尚正君に心から謝意を表す。

参考文献: ① Longuet-Higgins: J. F. M., Vol. 8, pp. 293~306, 1960.

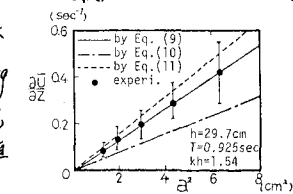


図3 水面質量輸送速度勾配の理論値と実験値の比較。

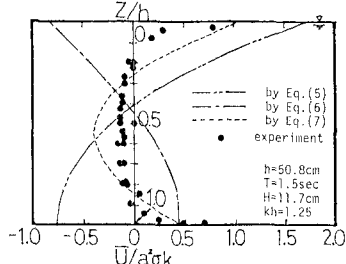


図1 境界条件の相違による理論値と実験値の比較。

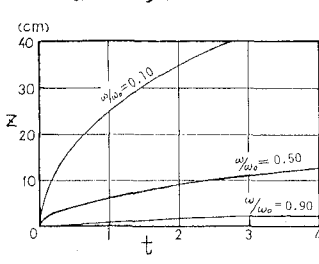


図2 渦度の拡散の時空間変化。

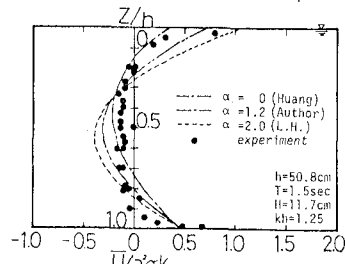


図4 質量輸送速度の鉛直分布の理論値と実験値の比較。