II-68　貯水池の利水機能に及ぼす要因の相関流量による解析 ── 半無限容量との関連を中心として ──

名古屋工業大学　正員　○　長尾正志，　建設省北陸地建　正員　浅野和広

1. 従来の研究の経緯と本研究の目的

すでに，利水用貯水池に対する機能評価について，単純化された相関二項分布流量と単位目標放流量を前提とした統計理論的研究を発表している*。その際，利水機能に関連する要因には，流量時系列の特性と貯水池側の特性がある。とくに，わが国のような地形的環境から，貯水池容量に大きな期待が望めない現状では，後者の特性の制約が強く効く。ところで，従来の貯水池理論のなかにも，貯水池容量したがって累加貯水量に制限をつけない解析法，それにも貯水量上限が無限と考えたもの（*topless dam*）と，貯水量下限が負の無限と考えたもの（*bottomless dam*）とがある。利水目的としては，水不足期が対象であり，*topless dam* が考察主体となることが多い。そこで，以下では，このような半無限容量としての取扱いを，有限容量のそれとを対比させながら，解析結果を具体的に説明している。

2. 貯水池の利水機能に関する基礎理論

前提とした条件や数式を以下に示す。　1)　3状態相関二項分布　目標放流量を単位として離散化した流量表示の下に，時刻 t の流量を X_t と記すと，継続した流量 X_t, X_{t+1} の条件付分布，周辺分布には，表-1のものを用いる。なお，$E[X_t]=2a$, $Corr(X_t, X_{t+1})=\rho$　2) 貯水量の定常分布と期待値　Moran流の放流規則に従うと，初期貯水量 u から出発して溢水することなく空水に至る確率 P_u は次式で与えられる。ただし，K は貯水池容量，また $x_0 \equiv [\{1-a(1-\rho)\}/\{\rho+a(1-\rho)\}]^2$ である。

ITEM	RANGE OF VARIABLES $i,j=0,1,2$
$p_{ij} = P_r[X_{t+1}=j \mid X_t=i]$	$\sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s}\binom{-i+2}{j-s} \{a(1-\rho)+\rho\}^s \times \{1-a(1-\rho)\}^{s+2-i-j} a^{j-s} (1-a)^{i-s} (1-\rho)^{i+j-2s}$
$p_i = P_r[X_t=i]$	$\binom{2}{i} (1-a)^{2-i} a^i$

表－1　3状態相関二項分布の条件付分布，周辺分布

$$P_u=\frac{\{(1-a)/a\}^2 x_0^{K-1}-[(1-a)(1+\rho)/\{1-a(1-\rho)\}^2]^2 x_0^u}{\{(1-a)/a\}^2 x_0^{K-1}-1}\quad (a\neq 1/2)\quad (1)\qquad P_u=\frac{K-u-\rho/(1-\rho)}{K+2\rho/(1-\rho)}\quad (a=1/2)\quad (2)$$

ここで，双対定理　$V_i=P_{K-1-i}-P_{K-i}$, $V_0=P_{K-1}$, $V_{K-1}=1-P_1$ より，貯水量の定常分布 $V_i=P_r[Z=i]$ および貯水量の期待値 $E[V]=\sum_{i=1}^{K-1} iV_i$ は，それぞれ次式で求められる。

$$\left.\begin{aligned}
V_0&=\gamma\frac{(1-a)^2(1-2a)(1+2a\rho)}{a^2\{1-a(1-\rho)\}^2}x_0^{K-1}\\
V_i&=\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2(x_0-1)x_0^{K-1-i}\\
V_{K-1}&=\gamma\left[\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2x_0-1\right]
\end{aligned}\right\}\ (a\neq 1/2)\quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
V_0&=V_{K-1}=1/[K+(2-K)\rho]\\
V_i&=(1-\rho)/[K+2(2-K)\rho]
\end{aligned}\right\}\ (a=1/2)\quad (4)$$

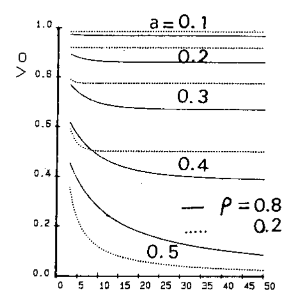
ただし　$\gamma=1/[\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1}-1]$

$$E[V]=\gamma\left[\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2\frac{x_0(x_0^{K-1}-1)}{x_0-1}-(K-1)\right]\ (a=1/2)\quad (5)\qquad E[V]=(K-1)/2\quad (a=1/2)\quad (6)$$

3. 半無限容量貯水池との関連性

3. 1　貯水池の空水確率と貯水池容量との関連性

K がある程度大きいと，$a \ll 1/2$，つまり $x_0 \gg 1$ の場合，$\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1} \gg 1$ となり，$V_0'=\lim V_0=(1-2a)(1+2a\rho)/\{1-a(1-\rho)\}^2$, $V_i'=[a(1+\rho)\div\{1-a(1-\rho)\}]x_0^{1-i}$　$(i=1, 2, \cdots, K-2)$　(7)　このように，V_0', V_1', V_2', … などに K が関与してこない。すなわち，渇水時には流量が少なく，貯水量が貯水容量近くになり溢水を起こすことはほとんどないので，容量の条件は効かなくなる。たとえばその状況を図-1に示す。図で，実線，破線は $\rho=0.8$,



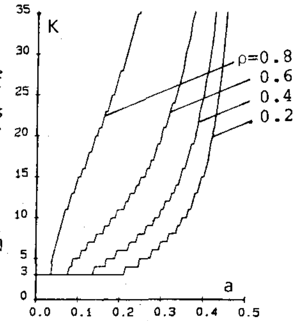
図－1　貯水池容量と渇水確率の関係

0.2 に対応し，a または ρ が小さいほど，Kがある程度大きければ，Kに関係しなくなる。つまり，その流況の下では，それ以上貯水池容量を大きくしても，空水確率が減らない実用的な限界があることになる。これを貯水池容量の妥当規模と呼んでおく。

この妥当規模の実用値は，dV_0/dK が0に近いある許容値 $-\varepsilon$ となったときのKの値として，求められる。dV_0/dK が負であることに注意して，これは次式を満すKで計算される。

$$-\frac{dV_0}{dK}=\varepsilon=\begin{cases}\gamma^2\dfrac{(1-a)^2(1-2a)(1-2a\rho)}{a^2\{1-a(1-\rho)\}^2}(K-1)x_0^{K-2} & (a\neq 1/2)\\[2ex] (1-\rho)/\{2\rho+K(1-\rho)\}^2 & (a=1/2)\end{cases}\qquad (8)$$

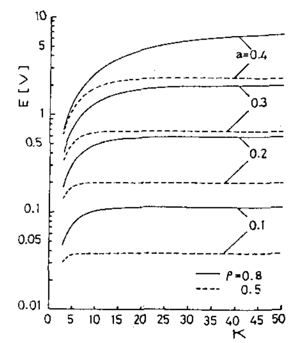
たとえば，$\varepsilon=10^{-3}$ とした場合の貯水池容量の妥当規模を，ρ をパラメータとして，図-2に示す。これより，妥当規模は，a の増加とともに，ρ が小さければ指数関数的に，また ρ が大きければ直線的に増加することが分る。



図－2　貯水池容量の妥当規模と流量時系列特性との関係

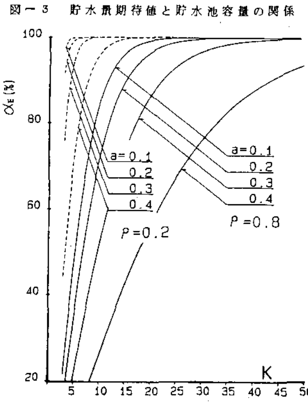
3.2　貯水量期待値と貯水池容量の関係

$E[V]$ とKとの関係を，a と ρ をパラメータとして，図-3に示す。（実線，破線は $\rho=0.8,\ 0.5$）前と同様な理由で，貯水池容量の妥当規模が，この面からも推定できる。ここでは，$E[V]$ の大きさの評価を，その流況下での貯水池容量を十分大きくとった貯水池（*topless dam*）の貯水量期待値 $E'[V]$ を基準とした値，$\alpha_E\equiv E[V]/E'[V]$ の形で表わすことにしよう。



図－3　貯水量期待値と貯水池容量の関係

さて，$E'[V]=\lim_{K\to\infty}E[V]=a^2(1+\rho)/\{(1-2a)(1-\rho)\}$　(9) より，$\alpha_E=\{x_0^K-1-K(x_0-1)\}/\{x_0^K-x_0a/(1-a)^2\}=1-\{1+K(x_0-1)-x_0a\div(1-a)^2\}/\{x_0^K-x_0a/(1-a)^2\}$　(10)　この α_E を図-4で，実線，破線を $\rho=0.8,\ 0.2$ として，百分率で示す。これより，a が小さいほど，また ρ が小さいほど，Kが小さいうちから，α_E が100%（半無限容量の結果と有限容量のそれとの合致）に近づくことが分る。なお，α_E の100%への近接の仕方は，K，$x_0\gg 1$ とした近似によって，$1-\alpha_E\simeq O(K/x_0^{K-1})$ となることが分る。



図－4　有限容量と半無限容量の貯水池での貯水量期待値の比

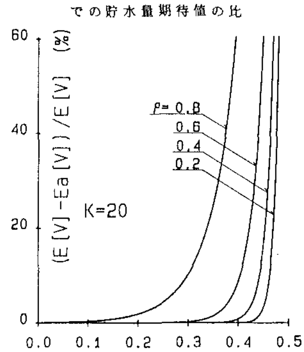
3.3　空水確率と貯水量期待値との関連

前述のように，空水確率，貯水量期待値ともに，貯水池容量がある程度大きくなれば，ほぼ一定値に漸近する。そこで，こうした場合の両者をまず考察対象とする。(7)，(9)式の V_0'，$E'[V]$ を用いると，両者の比 β は，

$$\beta\equiv E'[V]/V_0'=a^2\{1-a(1-\rho)\}^2/\{(1-2a)^2(1+2a\rho)(1-\rho)\}\qquad(11)$$

となる。この β が，有限容量の貯水池に対しても空水確率と貯水量期待値を関連づける重要な指標となるであろうことも予想される。

たとえば，貯水量期待値の近似値を $Ea[V]=\beta V_0$ とおいて，その相対誤差 $R=\{Ea[V]-E[V]\}/E[V]$ を，$K=20$ として，百分率で図-5に示す。これより，a が小であれば，かなり大きい ρ に対しても，相対誤差 R が十分小さいので，この近似式の有用度が高いことが分る。



図－5　貯水量期待値の近似値の相対誤差

＊参考文献　長尾正志・羽鳥明満・浅野和広：利水用貯水池機能の評価のための単純化された相関流量による解析，第20回水理講演会論文集，1984年2月，pp. 1〜6