## II-60　多変数MEP分布の理論式について

信州大学工学部　正員　寒川典昭
信州大学工学部　正員　荒木正夫

### 1．まえがき

MEP分布とは、与えられた情報（制約条件）の下でエントロピーを最大にする分布である。確率変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ （$n \geqq 3$）によって与えられるMEP分布を多変数MEP分布という。多変数正規分布等も水文量の頻度解析に適用し得る分布であるが、ここでは最大エントロピーが持つ特性によりMEP分布を導入し、任意関数の期待値を制約条件とした場合、及び統計モーメントを制約条件とした場合について理論式の展開をはかる。さらに、具体的なパラメタ同定法を示す。尚、以下での議論は従来の我々の研究[1),2)]を多変数に拡張したものである。

### 2．一般的な定式化

n次元同時確率密度関数を $p(x_1,\ldots,x_n)$ とするとエントロピーは

$$H=-\int\ldots\int p(x_1,\ldots,x_n)\ln p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\ , \tag{1}$$

任意関数を $g_r(x_1,\ldots,x_n)$ とすると制約条件、すなわちデータから得られる情報は

$$\int\ldots\int g_r(x_1,\ldots,x_n)p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n=E[g_r(x_1,\ldots,x_n)]\ ,\quad r=1,\ldots,M \tag{2}$$

と表現される。ここで、$E[\cdot]$ は期待値記号であり、上式は $g_r(x_1,\ldots,x_n)=1$ を含む。

（2）式を制約条件として（1）式を最大にする分布は、得られる情報は $g_r(\cdot)$ の期待値として取り入れ、それ以外はできるだけ一様となる $p(\cdot)$ を求めていることである。すなわち、情報の与え方には主観が入るが、それ以外はできるだけ客観的な分布を評価していることになる。我々は、水文量のようなデータの少ない自然現象の説明に、このような分布を採用することは妥当と考える。　そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法で解く。ラグランジュ関数は

$$L=H+\sum_{r=1}^{M}\lambda_r\{E[g_r(x_1,\ldots,x_n)]-\int\ldots\int g_r(x_1,\ldots,x_n)p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\} \tag{3}$$

となり、上式を $p(\cdot)$ に関して偏微分して零とおくことにより、最大エントロピー推定値（多変数MEP分布）は

$$p(x_1,\ldots,x_n)=\exp\{-1-\sum_{r=1}^{M}\lambda_r g_r(x_1,\ldots,x_n)\} \tag{4}$$

の形で得られる．ここで、$\lambda_r$ はラグランジュ乗数であり次式を満足する。

$$\int\ldots\int g_r(x_1,\ldots,x_n)\exp\{-1-\sum_{r=1}^{M}\lambda_r g_r(x_1,\ldots,x_n)\}dx_1\ldots dx_n=E[g_r(x_1,\ldots,x_n)]\ ,\quad r=1,\ldots,M \tag{5}$$

ここで、$g_r(\cdot)$ としていかなる関数を採用するかにより、（4）式は種々のタイプの分布型を取り得る。このことは、MEP分布はピアソンの分布等と同レベルの分布系であることを示している。

### 3．$g_r(\cdot)$ の導入とMEP分布

x［0，∞）、y［0，∞）とし、我々が水文量の母集団に関して知り得る情報と確率密度関数が具備すべき条件、すなわち（2）式を以下のように書く。

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty x_1^{a_1}p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n={}_{x_1}\mu_{a_1}\ ,\quad a_1=1,\ldots,N_{a_1} \tag{6.1}$$

・・・

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_n^{a_n}\,p(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n={}_{x_n}\mu_{a_n}\quad,\quad a_n=1,\ldots,N_{a_n}\tag{6.n}$$

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\,p(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\mu_{b_1\ldots b_n}\ ,$$
$$b_1=0,1,\ldots,N_{b_1}\ ,\ \ldots\ ,\ b_n=0,1,\ldots,N_{b_n}\tag{6.n+1}$$

ただし、$\mu_{0\ldots0}=1$ であり、$b_1,\ldots,b_n$ の１つだけが値を持ち他は零となることはない．したがって、（４）式は

$$p(x_1,\ldots,x_n)=\exp\{-1-\sum_{a_1=1}^{N_{a_1}}{}_{x_1}\gamma_{a_1}x_1^{a_1}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_{x_n}\gamma_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\delta_{b_1\ldots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}\tag{7}$$

となる。ここで、 ${}_{x_1}\gamma_{a_1},\ldots,{}_{x_n}\gamma_{a_n},\delta_{b_1\ldots b_n}$ はラグランジュ乗数である。これらの近似値を ${}_{x_1}\gamma^0_{a_1},\ldots,{}_{x_n}\gamma^0_{a_n},\delta^0_{b_1\ldots b_n}$ 残差を ${}_{x_1}\varepsilon_{a_1},\ldots,{}_{x_n}\varepsilon_{a_n},\varepsilon_{b_1\ldots b_n}$ とおくと

$${}_{x_1}\gamma_{a_1}={}_{x_1}\gamma^0_{a_1}+{}_{x_1}\varepsilon_{a_1},\ldots,{}_{x_n}\gamma_{a_n}={}_{x_n}\gamma^0_{a_n}+{}_{x_n}\varepsilon_{a_n},\delta_{b_1\ldots b_n}=\delta^0_{b_1\ldots b_n}+\varepsilon_{b_1\ldots b_n}\tag{8}$$

となり、上式を（６．１）－（６．n+1）に代入して線形化すると次の連立方程式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{N_{a_1}}A^{x_1}_{i_1+k}\,{}_{x_1}\varepsilon_k+\sum_{i_n=1}^{N_{a_n}}A^{x_1x_n}_{i_1i_n}\,{}_{x_n}\varepsilon_{i_n}+\sum_{j_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{j_1=0}^{N_{b_1}}A^{x_1\ldots x_n}_{i_1+j_1\ldots j_n}=C^{x_1}_{i_1}\quad,\quad i_1=1,\ldots,N_{a_1}\tag{9.1}$$

$$\sum_{i_1=1}^{N_{a_1}}A^{x_1x_n}_{i_1i_n}\,{}_{x_1}\varepsilon_{i_1}+\cdots+\sum_{k=1}^{N_{a_n}}A^{x_n}_{i_n+k}\,{}_{x_n}\varepsilon_k+\sum_{j_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{j_1=0}^{N_{b_1}}A^{x_1\ldots x_n}_{j_1\ldots i_n+j_n}\varepsilon_{j_1\ldots j_n}=C^{x_n}_{i_n}\quad,\quad i_n=1,\ldots,N_{a_n}\tag{9.n}$$

・・・

$$\sum_{i_1=1}^{N_{a_1}}A^{x_1\ldots x_n}_{i_1+j_1\ldots j_n}\,{}_{x_1}\varepsilon_{i_1}+\cdots+\sum_{i_n=1}^{N_{a_n}}A^{x_1\ldots x_n}_{j_1\ldots i_n+j_n}\,{}_{x_n}\varepsilon_{j_n}+\sum_{k_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{k_1=0}^{N_{b_1}}A_{j_1+k_1\ldots j_n+k_n}\varepsilon_{k_1\ldots k_n}$$
$$=C^{x_1\ldots x_n}_{j_1\ldots j_n}\ ,\ j_1=0,1,\ldots,N_{b_1}\ ,\ldots,\ j_n=0,1,\ldots,N_{b_n}\tag{9.n+1}$$

ここで、

$$A^{x_1\ldots x_n}_{k_1\ldots k_n}=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\exp\{-1-\sum_{a_1=1}^{N_{a_1}}{}_{x_1}\gamma^0_{a_1}x_1^{a_1}-\cdots-\sum_{a_n=1}^{N_{a_n}}{}_{x_n}\gamma^0_{a_n}x_n^{a_n}-\sum_{b_n=0}^{N_{b_n}}\cdots\sum_{b_1=0}^{N_{b_1}}\ ,$$
$$\delta^0_{b_1\ldots b_n}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\}dx_1\cdots dx_n\ ,\ C^{x_i}_i=A^{x_i}_i-{}_{x_i}\mu_i\ ,\ C^{x_1\ldots x_n}_{k_1\ldots k_n}=A^{x_1\ldots x_n}_{k_1\ldots k_n}-\mu_{k_1\ldots k_n}$$

## ４．具体的な計算法

（９．１）－（９．n+1）は $\varepsilon$ に関して $N_{a_1}+\ldots+N_{a_n}+\{(N_{b_1}+1)\ldots(N_{b_n}+1)-n\}$ 元１次連立方程式になっているため、解くことが可能である．次の順序でラグランジュ乗数を評価する。

１）（８）式の近似値を零とする。２）（９．１）－（９．n+1）式を $\varepsilon$ に関して解く。３）求まった $\varepsilon$ を（８）式に代入して左辺を計算して次の近似値とし、この操作を繰り返す。４）$\varepsilon$ が微小となったとき近似値を真値とみなし、（７）式よりＭＥＰ分布を求める。

## ５．あとがき

本研究では、多変数頻度解析のためのＭＥＰ分布の理論式を提案し、計算法を示した。一般に水文量は小標本であるため、得られる情報（モーメント）との関連においてこの分布を検討することが必要である。これは、実測データへの適用とともに今後の課題としたい。

---


1)寒川、荒木：水文事象の頻度解析へのＭＥＰ導入について、土木学会論文報告集、335、1983.7.
2)寒川、荒木、寺島：２変数ＭＥＰ分布とその特性に関する研究、水理講演会論文集、1984．2．