II-12　浸透能方程式について

京大防災研究所　正員　下島栄一・石原安雄

1. はじめに　いままでに，種々の簡単な浸透能方程式が提案された。その中にはGreen・Amptモデルに基づく方程式[1]，Hortonタイプの方程式[2]，Philipの方程式[3]などがある。問題はあるが，Adrain・Franziniのもの[4]とMorel-Seytoux・Khanjiのもの[5]以外は浸透水の移動に対して間隙空気の運動の効果が無視された形となっている。本文は，雨水浸透過程で間隙空気は浸透面からのみ外界へ放出されると考え，簡単ではあるが，一様な初期水分量分布をもつ一様な浸透場の上面に一定強度の降雨が続くという条件のもとで，途中浸透面に湛水が生じた以降の浸透能方程式について物理的に考察したものである。

2. 初期・境界条件　上記に従うと，初期条件は次式となる。

$t=0$ で，$\theta=\theta_0=\mathrm{const.}$ …①，$p_a=0$ …②　ここに，t は時間，θ は体積含水比，p_a は大気圧を基準にとった間隙空気圧である。つぎに，浸透面($x=0$)と場の下端($x=L$)での境界条件は次式となる。

$x=0$ で，$t<t_p$ のとき，$v=q=\mathrm{const.}$ …③，$p_a\approx 0$ …④；$t>t_p$ のとき，$p_w\approx h_w$[6] …⑤，$p_a\approx h_w$[6] …⑥

$x=L$ で，$v=0$ …⑦，$v_a=0$ …⑧．　ここに，t_p は湛水開始時間，x は下方を正とする位置座標，L は浸透場の厚さ，v と v_a は水と空気の流量流速，q は降雨強度，p_w は水圧，h_w は湛水深である。

3. 基礎式　湛水浸透の場合，水分量分布は浸透面より下方へ発達した後停止する擬似飽和域と，その下方の不飽和域とで構成される[6]。また擬似飽和域の水の流量流速 $\hat{v}$ と不飽和域の同流速 v は次式で与えられる[6]。

$$\hat{v}=\alpha_r\hat{K}\left(1+\frac{\beta_r/\alpha_r}{x_1}\right)\cdots⑨\qquad v=-D(1-A)\frac{\partial\theta}{\partial x}+K(1-A)\cdots⑩$$

ここに，$\alpha_r=\dfrac{\hat{K}_a}{\hat{K}_a+r\hat{K}}$ …⑪，$\beta_r\approx-\alpha_r\psi_1$ …⑫，$\hat{K}$ と $\hat{K}_a$ は擬似飽和域の等価な透水係数と透気係数，x_1 は同域下端の深さ，$\hat{v}_a$ を同域の空気の流量流速とすると $r=-\dfrac{\hat{v}_a}{\hat{v}}$ …⑬，ψ_1 は $x=x_1$ での毛管ポテンシャル，D は水分の拡散係数，K は不飽和透水係数，K_a を透気係数とすると $A=\dfrac{K}{K+K_a}$ …⑭，である。

浸透強度を f とし，擬似飽和域の θ を一定とすると，擬似飽和域と不飽和域での水の連続式は次式となる。

$$\hat{v}=f\cdots⑮,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\cdots⑯$$

ここで，後述の解析のために，関数 $F=\dfrac{v-v_0}{f-v_0}$ …⑰ を定義しておく[7]。v_0 は $\theta=\theta_{0+}$ での v を意味し，式①より $v_0=\{K(1-A)\}_{\theta\to\theta_{0+}}\equiv q_0$ …⑱ となる。

4. 解析の条件　[場と降雨強度] 1) K と K_a は時間的・場所的に変化しない。2) 湛水後，浸透面上に湛水が存在しさえすれば，降雨強度の変化と表面流の発生は可能とする。3) wetting front の前方は $\theta=\theta_0$ とする。[湛水前] 1) この場合の F を F_{be} と，また $x=0$ での θ を $\theta_s(t)$ と記すと，$\theta_s\leq\theta_c^*$ のとき，$F_{be}=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_s-\theta_0}$[8] …⑲$_1$，$\theta_s>\theta_c^*$ のとき，$\theta_0<\theta<\theta_c^*$ で $F_{be}=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_c^*-\theta_0}$ …⑲$_2$，$\theta>\theta_c^*$ で $F_{be}=1$ …⑲$_3$ 。ここに，θ_c^* は $\dfrac{\{K(1-A)\}_c-q_0}{\{K(1-A)\}_c'-q_0}=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_c'-\theta_0}$ の関係を満たす θ の値であって，$\theta_c'<\theta_c^*<\theta_c$ となる。また θ_c と θ_c' は $K(1-A)$ と $\dfrac{K(1-A)-q_0}{\theta-\theta_0}$ が最大値をとる水分量，添字 c と c' は $\theta=\theta_c$ と $\theta=\theta_c'$ での値を意味する。2) θ_s はある一定値の $\theta_m(>\theta_c)$ を越えて増大することはないとし，θ_s が θ_m になった以降の水分量分布は一定の速度 $\dfrac{q-q_0}{\theta_m-\theta_0}$ で形状を変化させず下方に移動する。また $\theta=\theta_m$ の部分は擬似飽和域とする。[湛水後] 1) 擬似飽和域の水分量を θ_m とする。2) この場合の F を F_{af} と記し，$\theta_0<\theta<\theta_c^*$ で $F_{af}=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_c^*-\theta_0}$[6] …⑳$_1$，$\theta>\theta_c^*$ で $F_{af}=1$[6] …⑳$_2$。3) α_r と β_r は変化せず，湛水浸透の場合で十分に時間が経ったときの値[6]の α_c と $\beta_c=-\dfrac{\alpha_c\psi_e}{1-\alpha_c}$ をとる。ここに，ψ_e は場の water entry value である。

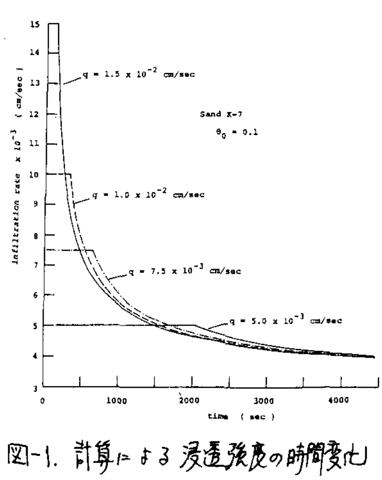

図-1. 計算による浸透強度の時間変化

5. 浸透能方程式

湛水前でθ_sがθ_mとなる時間t_1は式⑩，式⑯，式⑰，式⑲より，また湛水開始時間t_pは式⑨と[湛水前]の条件より，つぎのようになる。

$$t_1 = -\int_{\theta_0}^{\theta_m} d\theta \int_{\theta}^{\theta_m} \frac{D(1-A)}{K(1-A)-q_0-F_{bo}(q-q_0)} d\theta \Big/ (q-q_0) \quad \cdots ㉑, \qquad t_p = t_1 + \frac{(\theta_m-\theta_0)\beta_c \hat{k}}{(q-\alpha_c\hat{k})(q-q_0)} \cdots ㉒$$

つぎに，湛水後のfとtの関係式は式⑨，式⑩，式⑮～式⑰および[湛水後]の条件より次式で与えられる。

$$t = t_p + G_{qs} + G_{us} \quad \cdots ㉓$$

ここに，

$$G_{qs} = \frac{(\theta_m-\theta_0)\beta_c\hat{k}}{q_0-\alpha_c\hat{k}}\left[\frac{1}{f-\alpha_c\hat{k}} + \frac{1}{q_0-\alpha_c\hat{k}}\ln\left|\frac{f-q_0}{f-\alpha_c\hat{k}}\right|\right]_f^q \; ; \; q_0 \neq \alpha_c\hat{k}$$

$$= -\left[\frac{(\theta_m-\theta_0)\beta_c\hat{k}}{4(f-\alpha_c\hat{k})}\right]_f^q \; ; \; q_0 = \alpha_c\hat{k} \quad \cdots ㉔$$

$$G_{us} = \int_{\theta_0}^{\theta_m} d\theta \int_{\theta}^{\theta_m} \frac{D(1-A)F_{af}}{K(1-A)-q_0}\left[\frac{1}{K(1-A)-q_0(1-F_{af})-fF_{af}} + \frac{1}{K(1-A)-q_0}\ln\left|\frac{f-q_0}{K(1-A)-q_0(1-F_{af})-fF_{af}}\right|\right]_f^q d\theta \cdots ㉕$$

なお，$[\cdots]_f^q$は$[\cdots]_{f=q}-[\cdots]_{f=f}$である。式㉓より，$q > f > \{K(1-A)\}_c$の範囲の$f$に対する$t$が求まる。

$\{K(1-A)\}_c$は最終浸透能であり，この値は飽和透水係数値のほぼ半分となる(例えば後述のK-7砂の場合)[6]。

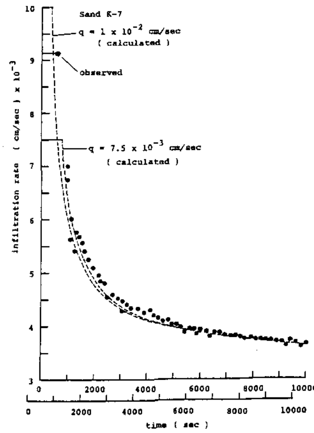

図-2. 実験値と計算値の比較

6. 計算例

比較的均一で平均粒径がほぼ0.12mmの砂(K-7砂)を対象にして，初期水分量を$\theta_0=0.1$にとり，降雨強度の値を種々変化させた場合の式㉓の計算値が図-1に示してある。これより，qが大なほどt_pは小となること，湛水後時間とともに$f(t;q)$はqに無関係にほぼ一つの曲線で減少することが分る。図-2はK-7砂で$L=169.5$cm，$\theta_0\approx 0$，$q=9.1\times10^{-3}$ cm/secの場合の実験値と計算値との比較を示す。なお，下方の時間軸は実験の場合である。湛水後両者の値はよく合致している。

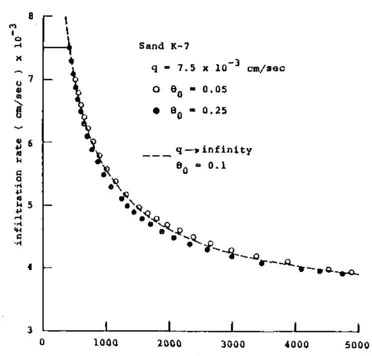

図-4. 時間軸を移動させた$f(t;\theta_0)$

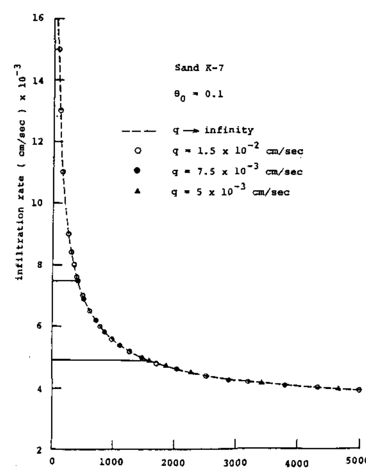

図-3. 時間軸を移動させた$f(t;q)$

7. 簡単な浸透能方程式

図-1の浸透曲線を，時間軸を適当にずらすと図-3のようになる。この図の時間軸は$q\to\infty$，$\theta_0=0.1$の場合に対応する。またqを一定値にとり，θ_0を種々変化させた場合の図-1に対応する曲線を図-3と同様な操作をすると図-4をうる。これらより$f(t;q)$と$f(t;\theta_0)$は適当に時間軸をずらすと，一つの曲線($q\to\infty$，$\theta_0=0.1$の場合)によく合致することが分る。そこで，この曲線を両対数紙にプロットすると，図-5の黒丸のようになる。最終浸透能が$\{K(1-A)\}_c \equiv f_\infty$となることを考慮すると，この図より，近似的に，つぎに示す簡単な浸透能方程式をうる。

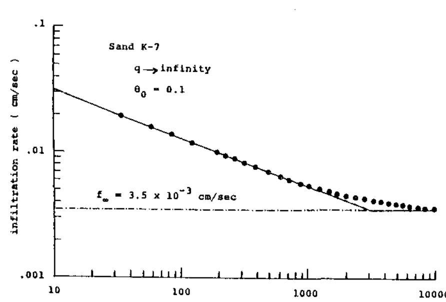

図-5. 簡単な浸透能変化曲線

$t \le t_c$のとき，$f = c\cdot(t+t_0)^{-n}$，$t > t_c$のとき，$f = \{K(1-A)\}_c \cdots ㉖$

ここに，tは湛水後の経過時間，nとcは定数値(>0)で例えば砂の種類によって変化するもの，湛水開始時の降雨強度をq_pとすると，$t_0 = \left(\frac{q_p}{c}\right)^{-1/n}$，$t_c = \left(\frac{f_\infty}{c}\right)^{-1/n} - t_0$，である。

《参考文献》1) 例えば，Childs: An introduction to the physical basis of soil water phenomena, pp.275-277. 2) 例えば，石原・石原：京大防災研年報(1962)，3) Philip: Soil Sci. (1957)，4) Adrain・Franzini: J.G.R (1966)，5) Morel-Seytoux・Khanji: W.R.R. (1974)，6) Ishihara・Shimojima: Bull. D.P.R.I., Kyoto Univ. (1983)，7) Philip: Soil Sci. (1973)，8) 石原・下島：京大防災研年報(1980).