

○九州大学 正員 神野健二 正員 上田年比古

鹿児島県庁 正員 鶴田明寛 清水建設 正員 平野文昭

1. はじめに 透水量係数の空間分布を観測値から推定する場合に、最小2乗法及び赤池の情報量基準によって近似関数の未知係数を求めることを提案した¹⁾。本報では、透水量係数の空間分布が与えられたある2次元の確率偏微分方程式の解であると仮定して、実測の透水量係数からこの方程式に含まれている未知パラメータを推定する問題を考える。

2. 2次元確率偏微分方程式

どのような数学モデルが、空間的にランダムに変化する透水量係数の満たすべき方程式として望ましいかは現在のところ不明である。これは丁度、時系列解析においてたとえば、ARモデルやMAモデル、あるいはARMAモデルを当てはめてモデルの適否を検討することと同様の問題である。ここでは、一応次のような方程式を考える：

$$Ax \partial^2 Y(x,y) / \partial x^2 + Ay \partial^2 Y(x,y) / \partial y^2 + \epsilon(x,y) = 0 \quad (1)$$

ここに、 Ax, Ay :未知自己回帰係数(km単位)、 $Y(x,y)$:透水量係数の対数変換値、 $\epsilon(x,y)$:正規性白色雑音(1/km単位)である。 $Y(x,y)$ および $\epsilon(x,y)$ を次のようにFourier級数に展開する：

$$Y(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{mn} \sin f(x,y) + b_{mn} \cos f(x,y)] \quad (2)$$

$$\epsilon(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{mn} \sin f(x,y) + B_{mn} \cos f(x,y)] \quad (3)$$

$f(x,y) = (2\pi mx/1x + 2\pi ny/1y)$ 、 $1x, 1y$: x, y 方向の基本波長である。

$\epsilon(x,y)$ の自己相関関数は

$$R_{\epsilon}(\xi, \eta) = (1/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn}^2 + B_{mn}^2) \cos f(\xi, \eta) \quad (4)$$

いま、 $\epsilon(x,y)$ が x 方向に $1/(2\phi x)$ 、 y 方向に $1/(2\phi y)$ 離れると相関が無いと考えると、

$$(1/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn}^2 + B_{mn}^2) \sin(m\pi/\phi x) \sin(n\pi/\phi y) / \{(m\pi/\phi x) * (n\pi/\phi y)\} \quad (5)$$

式(2)、(3)を式(1)に代入すると、

$$A_{mn} = \{Ax(2\pi m/1x)^2 + Ay(2\pi n/1y)^2\} * a_{mn} \quad (6)$$

$$B_{mn} = \{Ax(2\pi m/1x)^2 + Ay(2\pi n/1y)^2\} * b_{mn} \quad (7)$$

自己回帰係数が与えられているときの $Y(x,y)$ のスペクトルは、式(5)~(7)から

$$(1/2) (a_{mn}^2 + b_{mn}^2) \sin(m\pi/\phi x) \sin(n\pi/\phi y) / [(m\pi/\phi x) * (n\pi/\phi y) * \{Ax(2\pi m/1x)^2 + Ay(2\pi n/1y)^2\}] \quad (8)$$

したがって、 Ax, Ay が既知であれば $Y(x,y)$ のスペクトルを求めることができる。

3. $Y(x,y)$ の観測値から自己回帰係数

Ax, Ay を推定する方法

観測値から求めたFourier係数よりスペクトルを $(1/2) * (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2)$ と書く。ここで

表一 Ax, Ay の推定値generating conditions: $Ax=0.10\text{km}, Ay=0.18\text{km}$ $\phi x = \phi y = 1.0/\text{km}, 1x = 1y = 7.0\text{km}$

point numbers	AIC σ^2	(M,N)	estimated values $Ax(\text{km})$	$Ay(\text{km})$
-72.0			0.12	0.30
20	5.51×10^{-3}	(2,2)	0.12	0.52
-361.4			0.10	0.30
60	6.83×10^{-4}	(3,4)	0.13	0.50
-503.2			0.08	0.21
80	5.88×10^{-4}	(5,3)	0.12	0.68

☆ Upper values of Ax and Ay column are estimated by weighted least square method and lower values by least square method.

表二 観測点数 $K=20$ での Ax, Ay の推定値generating conditions: $Ax=0.100\text{km}, Ay=0.180\text{km}, \phi x = \phi y = 10.0/\text{km}, 1x = 1y = 7.0\text{km}$ measuring point numbers $K=20$

Run	(M,N)	$Ax(\text{km})$	$Ay(\text{km})$	J	Run	(M,N)	$Ax(\text{km})$	$Ay(\text{km})$	J
1	(2,2)	0.051	0.106	0.46●	11	(2,2)	0.213	0.145	0.23●
		0.049	-0.123	0.54			0.224	-0.189	0.36
		0.086	0.121	0.49●			0.119	0.173	0.45
2	(2,2)	0.086	-0.112	0.62	12	(2,2)	0.121	-0.317	0.44
		0.033	0.208	0.48●			no solution	no solution	
3	(2,2)	0.030	-0.222	0.57	13	(1,0)	no solution	no solution	
		0.063	0.185	0.43			0.058	0.089	0.78
		0.068	-0.278	0.35	14	(2,2)	0.415	-0.550	0.44
4	(2,2)	0.133	0.149	0.31●			no solution	no solution	
		0.128	-0.139	0.51	15	(2,2)	0.088	-0.190	0.44
5	(2,2)	0.116	0.226	0.42●			0.100	0.157	0.40●
		0.119	-0.301	0.43	16	(2,2)	0.102	-0.191	0.50
6	(2,2)	0.063	0.194	0.33●			0.120	0.151	0.20●
		0.063	-0.275	0.34	17	(2,2)	0.133	-0.182	0.41
		0.030	0.189	0.38●			0.028	0.159	0.41●
8	(2,2)	0.030	-0.220	0.40	18	(2,2)	0.026	-0.166	0.47
		0.079	0.144	0.61			0.107	0.132	0.31●
9	(2,2)	0.081	-0.289	0.49	19	(2,2)	0.096	-0.138	0.57
		0.141	0.225	0.38			0.118	0.133	0.44●
10	(1,2)	0.192	-0.387	0.25	20	(2,2)	0.121	-0.124	0.61

表三 観測点配置が室見川流域の場合の Ax, Ay の推定値generating conditions: $Ax=0.100\text{km}, Ay=0.180\text{km}, \phi x = \phi y = 10.0/\text{km}, 1x = 1y = 7.0\text{km}$

measuring points: same measuring points in the Muroi River Basin

Run	(M,N)	$Ax(\text{km})$	$Ay(\text{km})$	J	Run	(M,N)	$Ax(\text{km})$	$Ay(\text{km})$	J
		no solution	no solution		11	(4,1)	0.018	0.340	0.50
1	(9,0)	no solution	no solution				0.060	-0.355	0.44
		0.056	0.012	0.39●			0.026	0.001	0.59
2	(1,4)	0.064	-0.018	0.42	12	(1,4)	0.047	-0.008	0.42
		0.082	0.455	0.19●			no solution	no solution	
3	(3,1)	0.079	-0.572	0.41	13	(0,7)	no solution	no solution	
		no solution	no solution				0.114	0.060	0.54
4	(0,9)	no solution	no solution		14	(2,2)	0.122	-0.293	0.50
		0.068	0.043	0.44●			0.045	0.256	0.53
5	(2,2)	0.076	-0.042	0.49	15	(4,1)	0.085	-0.402	0.46
		0.028	0.092	0.41			0.152	0.014	0.54
6	(4,1)	0.044	-0.108	0.34	16	(2,2)	0.141	-0.242	0.52
		no solution	no solution				0.065	0.131	0.39
7	(4,1)	0.058	-0.695	0.44	17	(2,2)	0.111	-0.184	0.34
		0.009	0.145	0.67			0.029	0.063	0.75
8	(4,1)	0.020	-0.159	0.59	18	(2,2)	0.175	-0.116	0.45
		0.017	0.062	0.62			0.043	0.223	0.50
9	(2,2)	0.124	-0.059	0.45	19	(4,1)	0.060	-0.339	0.43
		0.072	0.121	0.40●			0.023	0.054	0.69
10	(4,1)	0.073	-0.685	0.41	20	(4,1)	0.034	-0.353	0.53

はスペクトルが自由度2の χ^2 -分布をすることを考慮して重み付き最小2乗法によって A_x, A_y を推定する。即ち、評価基準:

$$J = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \{ [(1/2) \cdot (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2) - (\text{式(8)のスペクトル})] \div [\text{式(8)のスペクトル}]^2 \} \rightarrow \min. \quad (9)$$

4. 計算例 表-1は A_x, A_y を与えて式(8)から計算されるスペクトルをもとに発生した一つの確率場に対して、観測点が7km四方内に20、60及び80ヶ所ある場合の算定結果である。 A_x, A_y の欄の上部の値は重み付き最小2乗法による推定値、下部の値は重みの付かない最小2乗法、即ち式(8)と観測値のスペクトルとの差の2乗を最小にした場合の推定値である。重み付き最小2乗法の方が良い結果となっている。表-2及び前報¹⁾の室見川流域での観測点配置による表-3は乱数を変えて場の発生を20回繰り返した場合である。与えた A_x, A_y がともにプラスの値にも関わらず、 J を最小にする A_x, A_y の推定値は必ずしもプラスの組(黒丸で示す)にはなっていない。表-2の場合には20回中13回がともにプラスの組として推定されているが、表-3の室見川流域の観測点配置ではプラスの組で J を最少にする組は4ケースである。したがって、後者のような観測点配置では A_x, A_y がともにプラスの値として推定される可能性は少ないようである。図-1は表-2のRun-4に対応するランダムな $Y(x, y)$ と、推定された $\hat{Y}(x, y)$ の等高線を示している。

この程度の確率場であればかなり A_x, A_y の推定は良いようである。表-4は表-2、3及び観測点を40ヶ所としたときの A_x, A_y のアンサンブル平均値を示している。casesの欄はAICによる最適項数: M, N の大小の組合せ(表-2、表-3のM,N欄参照)を示していて、 $M>N$ の回数が多い室見川流域の場合(9回)には、x方向に高い波数までFourier係数が算定されている。このことは表-3での A_x, A_y の推定が観測点の配置にかなり影響を受けることと対応しているものと考えられる。次に、criterion Iは表-2、表-3中に示す J の大小に関係なく A_x, A_y がともにプラスの組だけをアンサンブル平均したもの、IIは J が最少でしかも A_x, A_y がともにプラスのものをアンサンブル平均したものである。IIIは以下に述べる理由により、 J が最少で A_x, A_y がともにプラスでない組のアサンブル平均を計算したものである。即ち、与えた A_x, A_y がともにプラスであるから、推定された A_x, A_y がともにプラスでない組は意味の無い推定値とも考えられるが、表-3にも示すように室見川の観測点配置では A_x, A_y の推定が難しいようであるので一応参考のために示している。理論的にはアンサンブル平均の回数を増やせばIIによって、与えた A_x, A_y が推定されるものと考えられるが、推定精度が観測点数あるいは配置の影響を強く受けるものと考えられる。図-2には実際の室見川流域の透水量係数の観測値から計算したスペクトル及び本報の方法で推定した $A_x (= 0.029 \text{ km}), A_y (= -0.189 \text{ km})$ の値とこれに対応する式(8)のスペクトルである。 $m=1, n=0$ でのスペクトルが非常に大きくなった理由については今後検討したい。

参考文献:1) 鶴田他;透水量係数の空間分布推定について、第39回年次講演会概要集、昭和59年

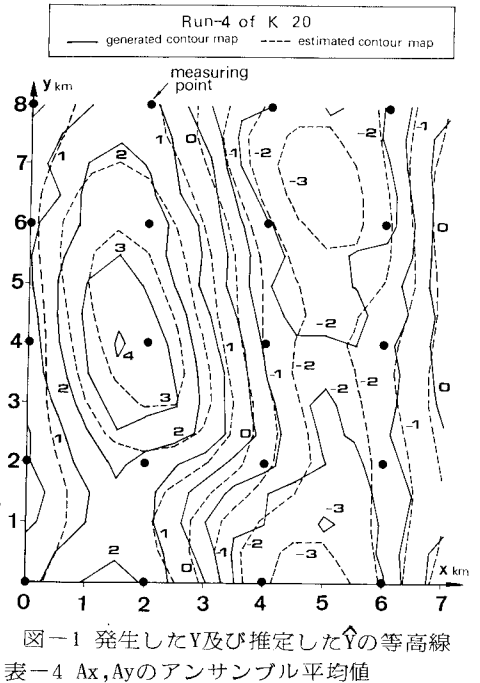


図-1 発生した Y 及び推定した $\hat{Y}$ の等高線
表-4 A_x, A_y のアンサンブル平均値

generating conditions:
for K=20 & Muroi River Basin; $A_x=0.100 \text{ km}, A_y=0.180 \text{ km}, \phi x = \phi y = 10.0 / \text{km}, l_x = l_y = 7.0 \text{ km}$
for K=40; $A_x=0.100 \text{ km}, A_y=0.180 \text{ km}, \phi x = \phi y = 1.0 / \text{km}, l_x = l_y = 7.0 \text{ km}$

cases	M>N	M=N	M<N	criterion I		criterion II		criterion III	
				$A_x(\text{km})$	$A_y(\text{km})$	$A_x(\text{km})$	$A_y(\text{km})$	$A_x(\text{km})$	$A_y(\text{km})$
K=20	0	18	1	0.092	0.160	0.092	0.159	0.161	-0.335
Muroi	9	6	2	0.053	0.130	0.070	0.158	0.083	-0.255
K=40	2	12	6	0.061	0.096	0.059	0.106	0.107	-0.143

criterion I: $A_x > 0, A_y > 0$, criterion II: $\text{Min. } J$ and $A_x > 0, A_y > 0$
criterion III: $\text{Min. } J$ and $A_x > 0, A_y < 0$

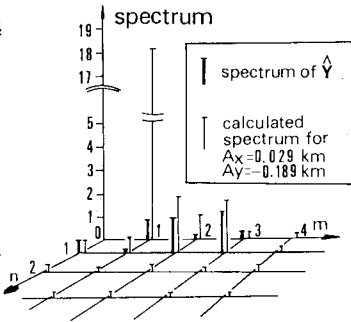


図-2 室見川流域の $\hat{Y}$ のスペクトル