I-487　剛性が平均有効応力のべき乗に比例するトランケートウェッジの固有振動解析

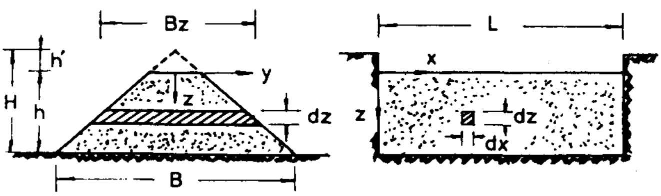
室蘭工大　正員　岸　徳光
北大工学部　〃　能町　純雄
奥村組技研　〃　黒岩　真彦

1．　はじめに　　フィルタイプダムの固有振動解析に関する研究は、多くの研究者によって理論的あるいは現場実測の立場から行われている。従来の解析手法は有限要素法による解析を除いて、すべて上下流方向底幅に対して高さが低いという理由から単純せん断理論を用い、ダム頂からの鉛直方向距離に関する応力の非線形性を考慮するために平均有効応力のべき乗に比例する剛性を仮定して解析を行っている。しかし、ダム構造物の合理的な動的解析を行う為には単純せん断理論が適用可能なウェッジパラメーターや谷幅の限界、あるいは最適な剛性指数等を明確にしておくことが肝要であるものと考える。

以上より、本文ではダム構造物を矩形状の谷を有するトランケートウェッジに仮定して、平均有効応力のべき乗に比例する不均質ウェッジせん断モデルに高さ方向の曲げモーメントおよび軸方向のせん断力、ねじりモーメントを考慮した振動方程式を定式化し、諸パラメーターによる固有値、固有モードへの影響について検討を行うこととする。

2．　振動数方程式の誘導

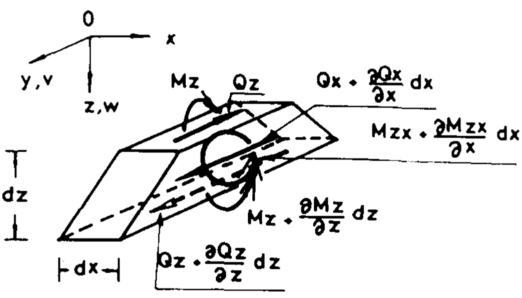
図－１．に示すような任意の矩形状谷を有するダム構造物において、ダム軸方向にx 軸，上下流方向にy 軸，高さ方向にz 軸をとり、対応する変位をそれぞれu ，v ，w とする。また、ダムの上下流方向の断面形状はトランケートウェッジ断面であるものと仮定する。



図－１．　矩形状の谷に位置するダムと座標系

上下流方向の自由振動において、z 軸回りの曲げモーメントは小さいものと考えられるのでこれを無視し、ウェッジ構造体の上下流方向応力分布の線形性を仮定して、各変位分布を次式のようにおく。すなわち、

$$u = 0, \quad v = v(x,z), \quad w = y\,\psi(x,z) \qquad \cdots (1)$$



図－２．　ウェッジの微小要素に作用する断面力

いま、ρ をウェッジの単位体積質量、B_z ，I_z をそれぞれz 断面における上下流方向の幅，ダム軸回りの断面二次モーメントとする。 Q_z ，Q_x をz 断面およびx 断面に作用する上下流方向せん断力、M_{zx} ，M_z をτ_{zx},σ_z による曲げモーメントとすれば、y 軸方向の力のつりあい，x 軸に関するモーメントのつりあいは慣性力を考慮して次のように示される。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \rho\, B_z \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \cdots (2) \qquad\qquad \frac{\partial M_{zx}}{\partial x} - Q_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \rho\, I_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \cdots (3)$$

式(2)，(3)が動的な基礎微分方程式である。ここで、ダム軸方向の変形モードをm 次の三角関数分布として、角速度p なる調和振動を仮定し、さらに座標およびウェッジの断面形状に関する無次元パラメータ

$$\xi = \frac{x}{L}\ , \qquad \eta = \frac{z}{h}\ , \qquad R_b = \frac{H}{B}\ , \qquad R_L = \frac{h}{L}\ , \qquad R_a = \frac{h'}{h}\ , \qquad \mu = \frac{1}{12}\frac{1}{R_b^3} \qquad \cdots (4)$$

一を次のように仮定する。Bz，Iz は前式より式(5)のように示され、剛性は一般化して式(6)のように仮定す。さらに、変位と固有円振動数を次式のようにおき、式(2)，(3)に式(4)～(7)を代入してせん断力Qzとたわみ角θについて整理すると振動方程式が次式のように求まる。

$$Bz = \frac{h}{Rb}(\eta + Ra),\quad Iz = \mu h^3(\eta + Ra)^3 \quad \ldots (5) \qquad G = G(z) = Gm\,\eta^n \quad \ldots (6)$$

$$\Theta = Gm\frac{\theta}{h},\quad \beta = \frac{ph}{Cs} \quad \ldots (7)$$

ただし、$\Psi = \frac{\theta}{z^2}$，$Cs = \sqrt{Gm/\rho}$ である。

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \left\{(n-1) - \frac{3Ra}{\eta+Ra}\right\}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \left\{\beta^2\frac{Gm}{Em}\frac{1}{\eta^n} - \left(2n - \frac{6Ra}{\eta+Ra}\right)\frac{1}{\eta^2} - (m\pi RL)^2\frac{Gm}{Em}\right\}\theta = \frac{Gm}{Em}\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\eta}{\eta+Ra}\right\}^3\frac{1}{\eta^{n+1}}Qz \quad \ldots (8)$$

$$\frac{\partial^2 Qz}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\eta}{\eta+Ra}\right)\frac{1}{\eta}\frac{\partial Qz}{\partial\eta} + \beta^2\frac{1}{\eta^n}Qz = \beta^2\frac{1}{Rb}\left(\frac{\eta+Ra}{\eta}\right)\frac{1}{\eta}\theta + (m\pi RL)\left\{\frac{\partial Qx}{\partial\eta} - \left(\frac{\eta}{\eta+Ra}\right)\frac{1}{\eta}Qx\right\} \quad \ldots (9)$$

$$\frac{\partial Qx}{\partial\eta} - \left(n + \frac{\eta}{\eta+Ra}\right)\frac{1}{\eta}Qx = (m\pi RL)Qz - (m\pi RL)\frac{1}{Rb}\left(\frac{\eta+Ra}{\eta}\right)\eta^{n-1}\theta \quad \ldots (10)$$

3． 境界条件および固有値方程式　堤頂部，底部における境界条件は、

$$\eta = 0 : Qz = 0,\quad Mz = 0 \qquad \eta = 1 : \theta = 0,\quad V = 0 \quad \ldots (11)$$

以上の境界条件式を式(8)～(10)の動的基礎微分方程式に代入して固有値方程式を誘導する。解を解析的に求めることは不可能であるのでここでは差分方程式に変換して求めることとする。簡略化してマトリックス式の形で示すと

$$[K]\{\Delta\} - \beta^2[M]\{\Delta\} = 0 \quad \ldots (12)$$

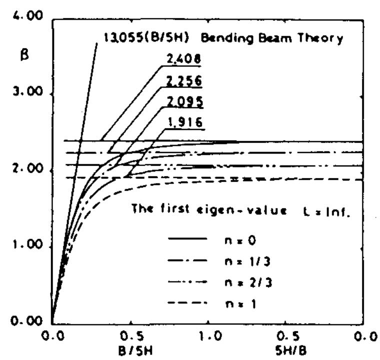
ただし、$\{\Delta\} = [\theta\ Qz]^T$ であり，$[K]$，$[M]$ も$\{\Delta\}$に対応するマトリックスである。したがって、式 (13)

$$\det\left|[K] - \beta^2[M]\right| = 0 \quad \ldots (13)$$

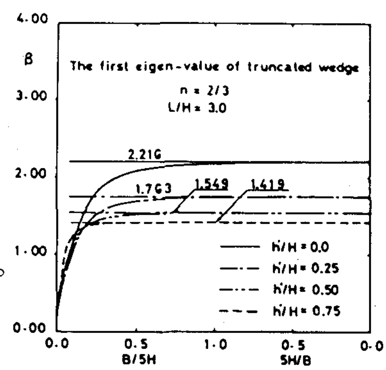
より固有値を求めることができる。数値解析は分割数による精度の検討の結果２０分割に固定して行うこととした。なお、ポアソン比は０．４５としている。

4． 数値解析結果　図－３．には最も単純な谷幅無限大，上下流方向断面がウェッジ形状の場合における固有値の分布を横軸にB ／5H をとり、n ＝０の場合の片持梁の曲げ振動の固有値と，各 n の値に対応する単純せん断振動の固有値と共に示してある。図よりB ／5H →０の場合は片持梁の曲げ振動，5H ／B →０の場合は単純せん断理論より求められる固有値に漸近していることがわかる。また、B ／5H ＝０．１前後から5H ／B ＝０．８前後までの領域は曲げ変形とせん断変形が連成している状態を示しているようである。この結果より、従来の設計のようにダムを梁構造と仮定する場合、コンクリート重力式ダムのようなB ／H ＝１程度の場合は曲げとせん断を考慮した解析を、またB ／H ＞５のようなフィルタイプダムの場合は単純せん断振動のみを考慮すればよいものと考えられる。図－４．にはL ／H ＝３，n ＝２／３の場合におけるh′すなわちトランケートの程度に対する固有値への影響について示している。図よりh′／H が大きくなるほどせん断変形の卓越する領域が大きくなっていることがわかる。

以上、矩形状の谷を有するトランケートウェッジ状のダムモデルの固有値解析を行った。今後、任意谷形状にも応用する予定である。



図－３　谷幅無限大，ウェッジ形状断面の固有値分布図



図－４．トランケートウェッジ形状断面の固有値分布図