

長崎大学工学部 学生員 ○池田虎彦
 長崎大学工学部 正員 高橋和雄
 九州大学工学部 学生員 松川 徹

1. まえがき アレートガーダー橋に動的荷重が作用した場合、腹板に面外変位が生じることが知られている。その原因として初期変形や係数振振動などが挙げられている。そこで著者らは、腹板の一部を一枚の長方形板と考え、動的問題として係数振振動による面外振動を各種のパラメーターのもとで解析し、面外振動に不安定領域が存在することを報告した¹⁾。この不安定領域では、線形理論によると振動は発散する。しかし、平板では振幅が板厚程度になると、板の中央面に生じる面内力によって振幅は有限になる。そこで、本研究は幾何学的非線形性を考慮したKármánの方程式を用いて、面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性を解析したものである。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示すような長方形板に、静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_0 \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用し、板に作用する面内方向の慣性力および回転慣性の影響を無視すると、板の非線形振動の基礎方程式は次の式になる²⁾。

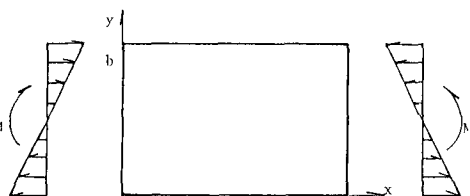


図-1 一般図

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (1)$$

$$L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} - d \left(\frac{\partial F}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_0 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

ここで、 x, y : 直交座標系、 d : 板厚、 ρ : 板の密度、 C : 減衰係数、 $D = Ed^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 $w(x, y, t)$: 面外変位、 F : Airy の応力関数。

境界条件として曲げに対して全辺単純支持、および面内変位に対して固定の場合を考える。

$$\text{曲げ} : w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, b) \quad (3) \quad u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\text{面内変位} : \int_0^b u dy = 0 \quad (x=0, a), \quad \int_0^a v dx = 0 \quad (y=0, b) \quad (4) \quad v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

3. 解法 面外変位 w を式(3)を満足するように仮定すると、

$$w(x, y, t) = d \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn} W_{mn}(x, y) \quad (5) \quad \text{となる。} \quad W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y : \text{座標関数}$$

T_{mn} : 未知の時間関数

式(4)を満足するように応力関数 F を決定し、これと式(5)を式(2)に代入してGalerkin法を適用する。

$$\int_0^a \int_0^b L(w, F) W_{mp}(x, y) dx dy = 0 \quad m=1, 2, \dots, p=1, 2, \dots \text{すなわち}$$

$$\alpha_m^2 \ddot{w}_{mp} + 2 R_{mp} (M^2 + \frac{p^2}{\mu^2}) \alpha_m \dot{w}_{mp} + (M^2 + \frac{p^2}{\mu^2}) \ddot{w}_{mp} + 2 \lambda_{cr} M^2 (\bar{M}_0 + \bar{M}_0 \cos \Omega t) \sum_{r=1}^{\infty} T_{mr} I_{pr} - 3(1 - \nu^2) M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} T_{mn}^2 T_{nr} \\ I_{prn} + \frac{3}{2} (1 - \nu^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}^2 T_{mp} \left\{ \frac{n^2 p^2}{2 \mu^4} + \frac{M^2}{1 - \nu^2} (M^2 + \frac{\nu n^2}{\mu^2}) + \frac{p^2}{1 - \nu^2} (\frac{n^2}{\mu^4} + \frac{\nu M^2}{\mu^2}) \right\} - 1/2 (1 - \nu^2) M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} T_{mn} T_{ms} T_{nr} (I_{prns} \\ - r^2 I_{prns}^2 - r I_{prns}^3) = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}$: 無次元静的曲げモーメント、 $\bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}$: 無次元変動曲げモーメント、 $\lambda_{cr} = \frac{6 M_{cr} a^2}{b^2 \pi^2 D}$: 座屈固有値、 R_{mn} : 減衰定数、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1'$: 無次元加振振動数、 $\omega_1' = \alpha_1' \sqrt{\frac{D}{\rho a}}$: 長方形板の x 方向の波数1の場合

合の最低次固有円振動数, ω : 1 次の
 抵動固有値, $\tau = \omega t$: 無次元時間, μ
 $= a/b$: 辺長比, I_{pr}, I_{prn} , など: Gal-
 erkin 法の積分項

式(6)において第4項までが線形項,
 5項から7項までが非線形項である。

次に式(6)を Runge-Kutta-Gill 法を
 用いて直接解いて, 不安定領域での時
 間応答を求める。

4. 解析結果 図-2は正方形板($\mu =$
 1.0)の面外振動の不安定領域を表した
 ものである。また, この不安定領域での
 時間応答を表したのが図-3, 4である。
 $\omega_1 + \omega_2$ の結合共振 (ω_1 : X 方向の半波数
 M , Y 方向の半波数 S の振動形をもつ固
 有振動数) について, $\bar{\omega} = 3.5$, $M_t = 0.4$,
 初期条件は $T_{M1} = T_{M2} = 0.01$, $\dot{T}_{M1} = \dot{T}_{M2} = 0.00$
 を使用した。図-3は線形項だけの場合
 の時間応答であり, 振動は発散している。

図-4は非線形項を加えた場合であり,
 振動は有限になっている。次に各不安定
 領域における M_t の変化に対する最大変位
 を表したものが図-5である。縦軸は
 板厚で無次元化したものであり, 各モー
 ドの減衰定数 β_{MN} を一定とし, β とおい
 た。図より高い振動数をもつ結合共振ほ
 ど, 面外変位は小さくなっていることが
 わかる。また, この場合 β が 0.1 くらい

までが減衰の影響を受けて面外振動は生じない。なお, ω_2
 $+ \omega_3$ の結合共振は減衰がある場合生じていない。

5. まとめ 非線形振動理論による解析では不安定振動は
 有限になることが確かめられた。本法を用いて今後, 面内変
 動曲げによる長方形板の面外変形を各種のパラメータの
 もとに解析する予定であり, これらは講演時に報告する。

参考文献

1) 高橋, 田川, 池田, 松川: 土木学会論文報告集, 第341
 号, 1984. 1

2) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theo-
 ry of Plates and Shells, 2nd. Edition, 1959

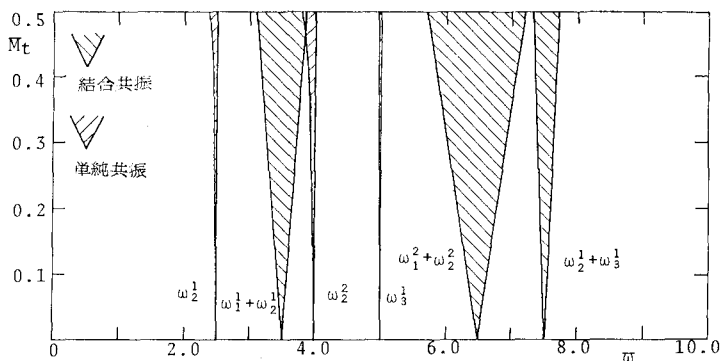


図-2 正方形板の面外不安定領域

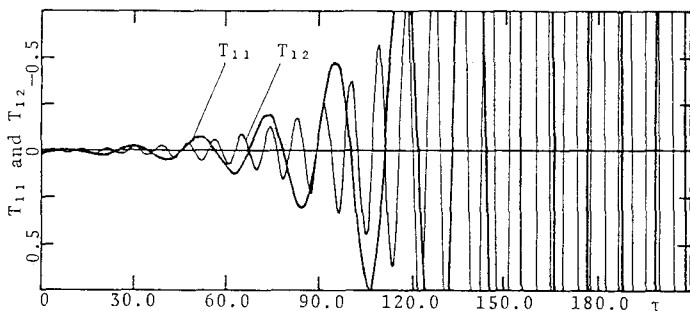


図-3 面外変位の時間応答 (線形)

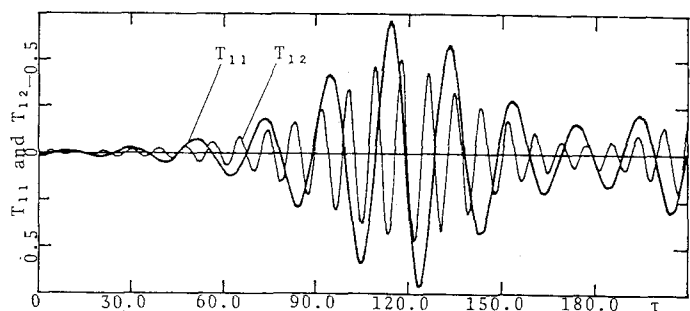


図-4 面外変位の時間応答 (非線形)

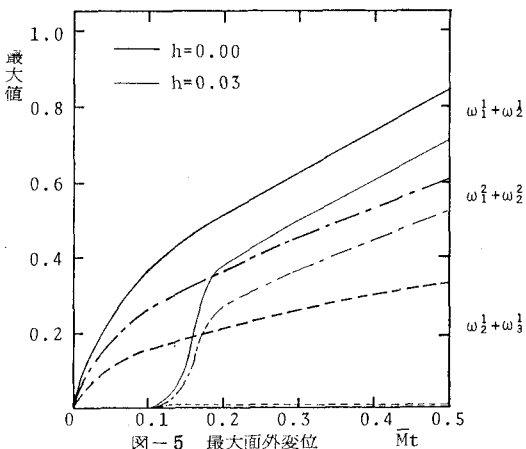


図-5 最大面外変位