

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

日本電炉(株) 正員 加藤邦寛

1. まえがき 円弧はりに面内変動荷重が作用すると、特定の振動数領域で面外の曲げおよびねじり振動が生ずることが知られている。この現象は係数励振不安定振動によるもので、円弧はりの動的安定性を解析する必要がある。これまでのところ本題に対して築地によって、面外の自由度を1とした解析が行われ、面外1次振動の単純共振が解明されている。しかし、円弧はりは無限の自由度をもつために多自由度として単純共振の他に結合共振も含んで取扱が必要である。そこで、本論文は文献2)の方法を用いて多自由度系として解析を行い、基本的性質を明らかにしたものである。

2. 運動方程式および解法 Fig.1に示すような円弧はりに(x, y, z)座標系を導入する。はりの両端で軸まわりの回転は可能であるが、x, y軸まわりの回転は拘束され、z方向の変位も拘束されているものとする。本題の面外振動の運動方程式は次のように与えられている。

$$L_1(v, \theta) = EI_y \left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} \right) + EI_\omega \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - GJ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (q_0 + q_1 \cos \Omega t) R \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} + \frac{wA}{8} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(v, \theta) = EI_\omega \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + EI_y \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - GJ \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (q_0 + q_1 \cos \Omega t) R \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{w}{8} I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

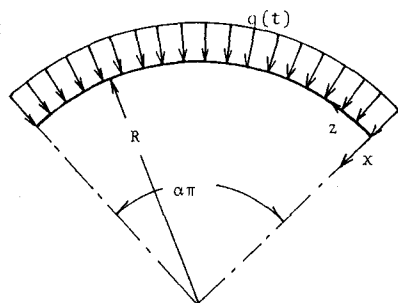


Fig.1 Co-ordinates

ここに、 v : 図心のz方向変位、 θ : z軸まわりの断面の回転角、 A , I_x , I_y , I_ω , I_p , ν : 断面係数、 E : ヤング率、 G : セン断弾性係数、 w : 単位体積重量、 q_0 : 変動荷重の振幅、 Ω : 励振円振動数

文献1)にしたがって、式(1), (2)を無次元化する。

すなわち、 $V = \frac{z}{R}$, $\theta = \theta$, $L = \frac{z}{R}$, $C_\omega = \frac{EI_\omega}{EI_y R^2}$, $G_T = \frac{GJ}{EI_y}$, $C_T = \frac{r^2}{R^2}$, $\tau = \Omega \tau$, $Q = \frac{q_0}{q_{cr}}$, $\mu = \frac{q_1}{q_{cr}}$, $\omega = \frac{\Omega}{\Omega_{cr}}$ より

$$L_1(V, \theta) = (1 + C_\omega) \frac{\partial^4 V}{\partial L^4} - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \left\{ C_T - \lambda_k (1 + C_T) (Q + \mu \cos \omega \tau) \right\} \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} + \lambda_\omega^2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} + C_\omega \frac{\partial^3 \theta}{\partial L^3} - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \left\{ (1 + C_T) - \lambda_k C_T (Q + \mu \cos \omega \tau) \right\} \frac{\partial^2 \theta}{\partial L^2} = 0 \quad (3)$$

$$L_2(V, \theta) = C_\omega \frac{\partial^3 V}{\partial L^3} - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \left\{ C_T - \lambda_k C_T (Q + \mu \cos \omega \tau) \right\} \frac{\partial^2 \theta}{\partial L^2} + \left(\frac{1}{R} \right)^2 \theta + \lambda_\omega^2 C_T \left(\frac{1}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial L^2} - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \left\{ (1 + C_T) - \lambda_k C_T (Q + \mu \cos \omega \tau) \right\} \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} + C_\omega \frac{\partial^3 \theta}{\partial L^3} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\lambda_k = \frac{q_0}{EI_y}$: 面外座屈固有値、 $\lambda_\omega = \frac{wA}{8} \frac{R^4}{EI_y} \Omega_{cr}^2$: 面外1次振動の固有値

式(3), (4)の解を次のように仮定する。

$$V = \sum_{i=1}^n T_i(t) G_i(L), \quad Q = \sum_{i=1}^n T_i(t) H_i(L) \quad (5)$$

ここに、 T_i : 未知の時間関数

G_i, H_i : 面外自由振動の固有振動数

式(5)を式(3), (4)に代入して Galerkin法を適用する。すなわち、

$$\int_0^1 \{ L_1(V, \theta) G_n + L_2(V, \theta) H_n \} dL = 0 \quad (6) \quad \text{ここに、} n = 1, 2, \dots$$

これより、次のような T_n に関する運動方程式が得られる。

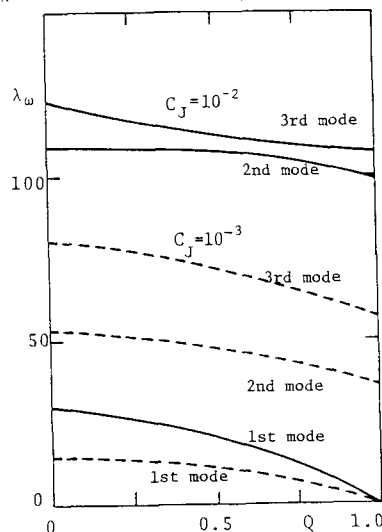
$$\{\ddot{T}\} + \frac{1}{\omega_n^2} \{E\} \{T\} + \frac{\mu}{\omega_n^2} \{F\} \cos \omega \tau \{T\} = \{0\} \quad (7) \quad \text{ここに、} \{T\} = \{T_1, T_2, \dots\}^T$$

式(7)の一般解を次のように仮定する²⁾

$$\{T\} = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\tau + b_n \cos n\tau) \right\} \quad (8)$$

ここに、 λ : 未知定数、 b_0, a_n, b_n : 未知のベクトル

式(8)を式(7)に代入して細部バランス法を適用すれば、未知ベクトルを求めるための同次方程式が得られる。

Fig.2 Eigenvalues λ_ω vs radial load Q for stiffness ratio C_J

$$\{M_0 - \lambda M_1 - \bar{\lambda} M_2\} X = \{0\} \quad (9)$$

ここに、 $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}^T$

式(9)は倍サイズの固有値問題に変換される。

3. 数値結果 (1) 固有振動特性

Fig. 2は中心角 $\alpha = \pi/4$, $C_\omega = 0$, $C_J = 10^{-3}$ なる円弧よりの振動の固有値 λ に及ぼす静荷重 Q の影響を C_J をパラメータにプロットしたものである。 Q の増大とともに固有値は減少するが、その割合は振動次数によって異なる。

(2) 不安定領域 式(7)の行列(F)の要素構成より円弧よりは単純共振と和形の結合共振が存在することが判明した。Fig. 3, 4, 5に $\alpha = \pi/4$ の場合の不安定領域を示す。これらの図において横軸 ω は励振振動数を、縦軸 μ は荷重強度を示す。斜線部が不安定領域に対し、 $2\omega_k/k$ ($k=1, 2$)の記号をつけた右上りの斜線部が単純共振を示す。 $k=1$ の場合が主不安定領域で、 $k=2$ の場合が副不安定領域である。また、 $\omega_1 + \omega_2$ の記号をつけた右下りの斜線部が結合共振の主不安定領域である。これらの図より円弧よりの不安定領域の幅については、単純共振の主不安定領域が最も広く重要である。結合共振の幅は一般に狭いと言える。

Fig. 3と4の比較より、静荷重 Q が作用すると、単純共振の不安定領域が広められる結果が得られている。なお、横軸は静荷重 Q が作用しない場合の固有振動数を用いて無次元化している。Fig. 3と5の比較より、 C_J が変化すると、1次以外の不安定領域の幅が影響を受ける。

4. まとめ 本研究によって円弧よりの動的不安定性解析のための定式化と不安定領域が明らかにされた。不安定領域と固有振動特性との関係、断面定数の影響については講演時に発表する。

参考文献 1) 桑地：周期荷重による円弧よりの面外不安定、長崎大学工学部研究報告第4号、pp. 4~54、昭和48年12月、2) 高橋・米倉：係数励振振動系の不安定領域の計算法、土木学会論文報告集、第320号、pp. 165~169、1982年4月

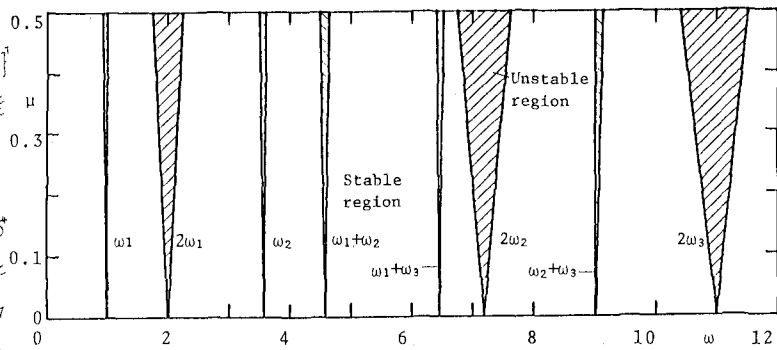


Fig. 3 Regions of parametric instability for a circular beam: $C_\omega = 0, C_J = 10^{-3}, C_Y = 10^{-4}, \alpha = 1/4$ and $Q = 0$.

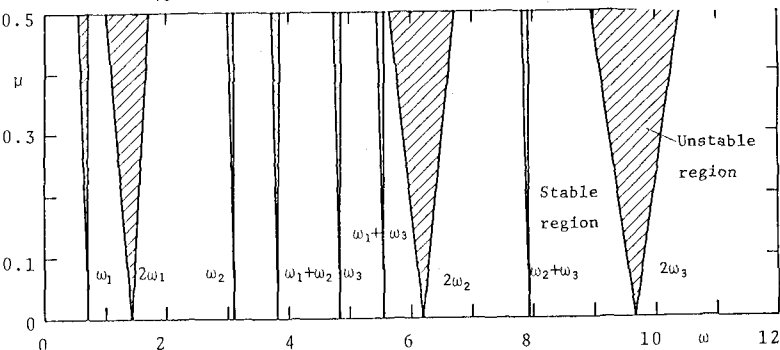


Fig. 4 Regions of parametric instability for a circular beam: $C_\omega = 0, C_J = 10^{-3}, C_Y = 10^{-3}, \alpha = 1/4$ and $Q = 0.5$.

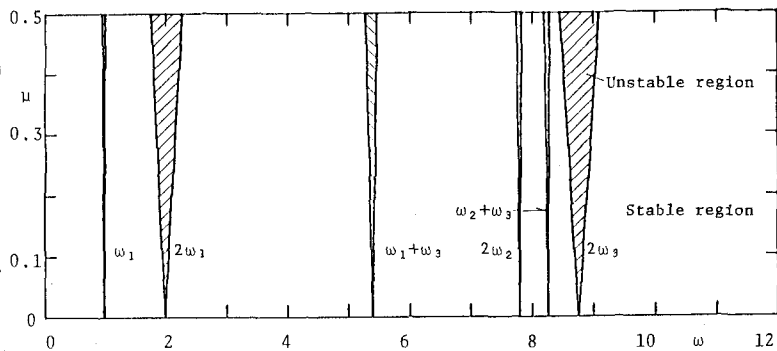


Fig. 5 Regions of parametric instability for a circular beam: $C_\omega = 0, C_J = 10^{-2}, C_Y = 10^{-4}, \alpha = 1/4$ and $Q = 0$.