I-473　回転慣性およびせん断変形を考慮した正規関数系とそれらの直交関係－その２

八戸工業大学　正員　種山　和男

1．はじめに

回転慣性およびせん断変形まで考慮した正規関数系とそれらの直交関係を単一部材の場合について論じる。既に等断面の場合には報告[1]してあるので、変断面まで含む一般論を論じる。

2．直交関係

運動方程式はよく知られているように、次の連立偏微分方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)\right\}=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 y_b}{\partial z^2}\right)+k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)=\rho I\frac{\partial^3 y_b}{\partial z\partial t^2} \tag{2}$$

ここで、y：せん断変形まで含む全たわみ，y_b：曲げモーメントだけによるたわみ，z：軸方向座標，$k=\kappa GA$ κ：断面形状に依存する係数，G：せん断弾性係数，E：ヤング率，ρ：密度，A：断面積，I：断面２次モーメント，t：時間座標

$y(z,t)=Y(z)exp(ipt)$，$y_b(z,t)=Y_b(z)exp(ipt)$，$\Theta(z)=\frac{dY_b}{dz}$ とおき、(1)，(2)式をYとΘとで表現すれば

$$p^2(\rho AY)=-\{k(Y'-\Theta)\}' \tag{3}$$

$$p^2(\rho I\Theta)=-(EI\Theta')'-k(Y'-\Theta) \tag{4}$$

ここで、p：円振動数，右肩のダッシュ「′」はzに関する微分$\frac{d}{dz}$を意味する。

今、ラグランジュの運動方程式における運動エネルギーとひずみエネルギーに相当する項をそれぞれb_{rs}，k_{rs}とすれば、

$$\left.\begin{aligned} b_{rs}&=\int_0^\ell\rho AY_rY_s dz+\int_0^\ell\rho I\Theta_r\Theta_s dz\\ k_{rs}&=\int_0^\ell EI\Theta_r'\Theta_s' dz+\int_0^\ell k(Y_r'-\Theta_r)(Y_s'-\Theta_s)dz\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ここで、r,s：モードの次数，ℓ：部材長

(5)式のb_{rs}，k_{rs}を評価するため、(3)，(4)式から

$$p_r^2(\rho AY_r)=-\{k(Y_r'-\Theta_r)\}',\quad p_r^2(\rho I\Theta_r)=-(EI\Theta_r')'-k(Y_r'-\Theta_r) \tag{6}$$

(6)式の第１式にY_sを、第２式にΘ_sをかけて和をとると

$$p_r^2(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)=-(EI\Theta_r')'\Theta_s-\{k(Y_r'-\Theta_r)\}'Y_s-k(Y_r'-\Theta_r)\Theta_s \tag{7}$$

(7)式を０からℓまで積分する。右辺は部分積分を行う。

$$p_r^2\int_0^\ell(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)dz=\Big|-M_r\Theta_s-S_rY_s\Big|_0^\ell+k_{rs} \tag{8}$$

ここで、$S=k(Y'-\Theta)$：せん断力，$M=EI\Theta'$：曲げモーメント，また、座標系，断面力の正を図１，２に示す。

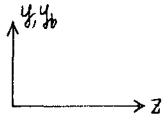

図１ 座標系(正)

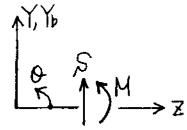

図２ 断面力(正)

(8)式の第１項は、両端がどのような境界条件のもとでも常にゼロとなる。即ち、

$$p_r^2\int_0^\ell(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)dz=k_{rs} \tag{9}$$

同様に、

$$p_s^2\int_0^\ell(\rho AY_sY_r+\rho I\Theta_s\Theta_r)dz=\Big|-M_s\Theta_r-S_sY_r\Big|_0^\ell+k_{sr}$$

$$\therefore\ p_s^2\int_0^\ell(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)dz=k_{rs}\quad(\because k_{sr}=k_{rs}) \tag{10}$$

(9)式と(10)式との差をとれば

$$(p_r^2-p_s^2)\int_0^\ell(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)dz=0 \tag{11}$$

$p_r\neq p_s$なら(11)式から

$$\int_0^\ell(\rho AY_rY_s+\rho I\Theta_r\Theta_s)dz=0$$

$$\therefore\ b_{rs}=0\quad(r\neq s) \tag{12}$$

$b_{rs}=0$ $(r\neq s)$ なら、(9)式または(10)式から

$$k_{rs}=0\quad(r\neq s) \tag{13}$$

即ち、$r\neq s$ なら

$$b_{rs}=0\quad かつ\quad k_{rs}=0\quad(r\neq s) \tag{14}$$

従って、互いに独立でないYとΘとが一対で直交関係((14)式)を成立させる。

$$\therefore\ p_r^2=\int_0^\ell(\rho AY_r^2+\rho I\Theta_r^2)dz\Big/\int_0^\ell\{EI\Theta_r'^2+k(Y_r'-\Theta_r)^2\}dz \tag{15}$$

3. 正規関数系

(3), (4)式からYは容易に消去でき、Θに関する式は、次のようになる。

$$(\bar{A}\bar{I})\theta'''' + (3\bar{A}\bar{I}' - \bar{A}'\bar{I})\theta''' + \left[3\bar{A}\bar{I}'' - 2\bar{A}'\bar{I}' + (\alpha+1)R_0^2\gamma_0^4\bar{A}\bar{I}\right]\theta''$$

$$+\left[\bar{A}\bar{I}''' - \bar{A}'\bar{I}'' + R_0^2\gamma_0^4\left\{(\alpha+2)\bar{A}\bar{I}' - \bar{A}'\bar{I}\right\}\right]\theta'$$

$$+\gamma_0^4\left[R_0^2(\bar{A}\bar{I}'' - \bar{A}'\bar{I}') + \bar{A}(\alpha R_0^4\gamma_0^4\bar{I} - \bar{A})\right]\theta \equiv 0 \qquad (16)$$

また、YはΘと次の関係で結ばれている。

$$Y = \frac{1}{\gamma_0^4\bar{A}}\left[(\bar{I}\theta')'' + R_0^2\gamma_0^4(\bar{I}\theta)'\right] \qquad (17)$$

ここで、$\bar{A} = A/A_0$, $\bar{I} = I/I_0$, $\gamma_0^4 = \rho A_0 p^2/EI_0$, $R_0 = \sqrt{I_0/A_0}$, $\alpha = E/\kappa_0 G$, 右下の小文字添字 0 は、基準断面での値を示す指標である。

等断面の場合： YまたはΘは、共に次の微分方程式を満足する[1]。添字 0 を省略すると

$$F'''' + (\alpha+1)\gamma^2(\gamma\ell/H)^2F'' + \gamma^4\left[\alpha(\gamma\ell/H)^4 - 1\right]F = 0 \qquad (18)$$

ここで、$H = \ell/R$, $F = Y$ またはΘ

i) $\alpha(\gamma\ell/H)^4 - 1 < 0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} Y &= C_1\sin az + C_2\cos az + C_3\,\mathrm{sh}\,bz + C_4\,\mathrm{ch}\,bz \\ \Theta &= C_1 f\cos az - C_2 f\sin az + C_3 g\,\mathrm{ch}\,bz + C_4 g\,\mathrm{sh}\,bz \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned} a &= \gamma\sqrt{\left\{(\alpha+1)(\gamma\ell/H)^2 + \sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma\ell/H)^4 + 4}\right\}/2} \\ b &= \gamma\sqrt{\left\{-(\alpha+1)(\gamma\ell/H)^2 + \sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma\ell/H)^4 + 4}\right\}/2} \\ f &= a - \alpha\gamma^2(\gamma\ell/H)^2/a, \quad g = b + \alpha\gamma^2(\gamma\ell/H)^2/b \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$C_1 \sim C_4$：定数

ii) $\alpha(\gamma\ell/H)^4 - 1 > 0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} Y &= C_5\sin az + C_6\cos az + C_7\sin b'z + C_8\cos b'z \\ \Theta &= C_5 f\cos az - C_6 f\sin az + C_7 g'\cos b'z - C_8 g'\sin b'z \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned} b' &= \gamma\sqrt{\left\{(\alpha+1)(\gamma\ell/H)^2 - \sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma\ell/H)^4 + 4}\right\}/2} \\ g' &= b' - \alpha\gamma^2(\gamma\ell/H)^2/b', \quad C_5 \sim C_8：\text{定数} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

(19), (21)式は、細長比Hを無限大にすれば、(20), (22)式から

$$a = b = f = g = \gamma, \quad b' = g' = i\gamma$$

となり、共に曲げだけの場合の式に帰着する。即ち、

$$\left.\begin{aligned} Y &= D_1\sin\gamma z + D_2\cos\gamma z + D_3\,\mathrm{sh}\,\gamma z + D_4\,\mathrm{ch}\,\gamma z \\ \Theta &= \frac{dY}{dz} = \gamma(D_1\cos\gamma z - D_2\sin\gamma z + D_3\,\mathrm{ch}\,\gamma z + D_4\,\mathrm{sh}\,\gamma z) \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$D_1 \sim D_4$：定数

4. おわりに

変断面の場合にも、YとΘとが一対で直交関係をなし、正規関数系を構成する。YまたはΘは、単独では直交関係が成立しないことに注意する必要がある。

また、曲げだけの場合は、理論的には細長比が無限大の場合の解である。

参考文献

1) 穐山和男：昭和58年度東北支部技術研究発表会講演概要
2) チェモシェンコ：工業振動学, 東京図書
3) Y・C ファン：固体の力学／理論, 培風館
4) 黒田道雄：機械振動学, 学献社
5) 得丸英勝：振動論, コロナ社
6) 谷本勉之助：マトリクス構造解析, 日刊工業
7) 中井 博：土木構造物の振動解析, 森北出版