I-413　消波境界を持った有限要素法による波動伝播解析

電々公社　正会員　鈴木　崇伸　　東大地震研究所　正会員　伯野　元彦

1. 研究目的　有限要素法は、弾性波動の伝播問題を解く際に有力な手法として、しばしば用いられている　しかし、無限領域、或いは半無限領域の一部をモデル化する時に、人為的に設定する境界において波動が乱され、適当な境界処理を施さないと、解析結果が無意味なものとなってしまう。　この問題を解決すべく、Cundall らの提案した方法を、3次元弾性波動問題にまで応用し、その実用化を計った。

Cundall の方法は、Neumann 条件と Dirichlet 条件の適当な組み合わせにより、定量的評価が可能な反射波を生じさせ、それを打ち消し合う2つの解を求めるというものであるが、その方法は完全であり、解析領域の次元にかかわらず適用できることを示した。　従来、Transmitting Boundary ，粘性境界法など、Lysmer などにより開発された方法も、なかなか有効であるが、これ等は、基礎地盤が完全剛であったり、周波数領域でなければ使えなかったりと、制約条件が多かった。　また、赤尾の開発した外挿法も有効であるが、3次元領域に適用するには、まだ一工夫要る。　このCundall の方法は、時間領域で計算でき、すなわち、非線形問題も等価線形化する必要がないという長所を持っている。

2. Smith の方法と Cundall の方法

境界により発生する反射波を、Neumann条件とDirichlet条件を巧みに重ね合わせることにより消波する方法は、Smith (1974) により提案された。　なお、独立に日本の 田村・中村 によっても提案されている。　更に、そのアイデアをもとに、境界条件を工夫したのが Cundall (1978) である。

ここでは、簡単なモデルを用いて、両者の違いについて調べてみる。

いま、一次元のuに関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\quad -\infty < x < 0\ ,\ t > 0 \qquad (1)$$

を初期条件

$$u\,(0\,,\,x) = 2\,f\,(x)\,,\qquad \frac{\partial u\,(0\,,\,x)}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

で解くことを考えると、x正方向に進行する波動は　$u\,(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t)$　(3)

で与えられる。（x負方向に進行する波動は考えない。）　初期条件が $f\,(x > 0) = 0$ を満たすとして

i) Smith の方法

a)　$u(t,0)=0$　（固定端の条件）で解くと、　$u_1(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t) - f\,(-x - c\,t)$

b)　$u(t,0)/\ \ x = 0$　（自由端の条件）で解くと、$u_2(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t) + f\,(-x - c\,t)$

この a) と b) の境界条件の解、u_1 と u_2 をたして2で割れば、即ち平均すれば反射波は消える。

ii) Cundall の方法

a)　$\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(0,0)}{\partial t} = -\,c\,f'(0)$　速度一定の境界条件で解く。解を u_3 と表す。(4)

$u_3(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t) + A_3\ f\,(-x - c\,t)$　とおき　式(4)に代入すると

$$\frac{u_3(t,0)}{t} = -\,c\ \{f'(-ct) + A_3 f'(-ct)\} = -\,c\,f'(0) \qquad \therefore\ A_3 = -1 + \frac{f\,(0)}{f\,(-ct)}$$

故に、

$$u_3(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t) + \{-1 + \frac{f'(0)}{f'(-ct)}\}\ f\,(-x - c\,t)$$

b)　$\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x}\qquad \dfrac{\partial u(0,0)}{\partial x} = f'(0)$　ひずみ一定の条件で解く。解を u_4 と表す。　(5)

a) と同様にして、

$$u_4(t\,,\,x) = f\,(x - c\,t) + \{1 - \frac{f'(0)}{f'(-ct)}\}\ f\,(-x - c\,t)$$

u_3 と u_4 を平均すれば、消波される。

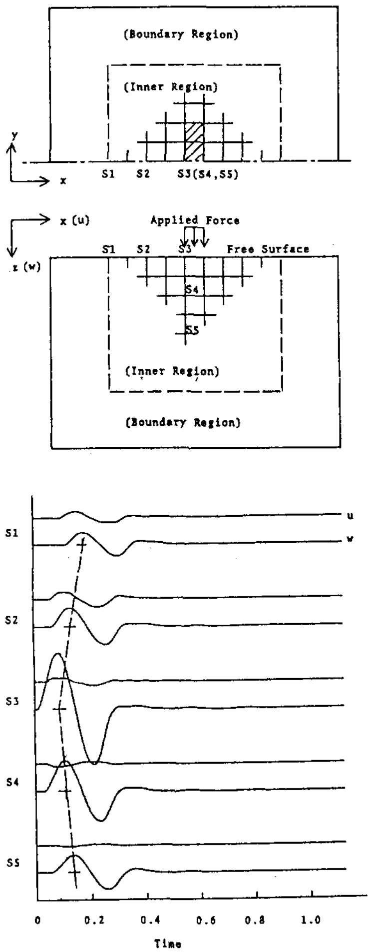
次に、解 u_1 ～ u_4 について、$t \to 0$ としてみると、

$u_1(0,x) = f(x) - f(-x)$,　$u_2(0,x) = f(x) - f(-x)$,　$u_3(0,x) = f(x)$,　$u_4(0,x) = f(x)$

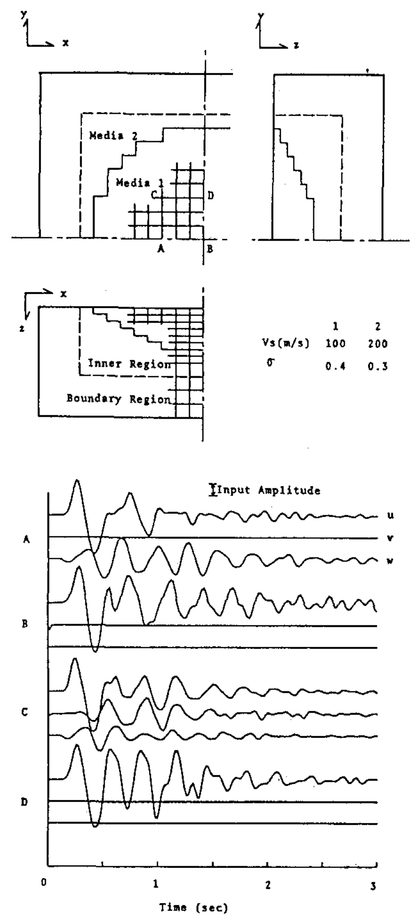
u_3，u_4 では、x正方向に進行する波動の初期条件が満たされているのに対し、u　，u　ではそうでない。　この初期条件 f(x) に関する制約の違いは重要であり、両者の決定的な差となる。　即ち、Cundall の方法では、任意時刻 $t = t_0$ (>0) において、初期条件を $u(t_0, x) = f(x - ct_0)$，$\partial u(t_0, 0)/\partial t = -c f'(-ct_0)$，$\partial u(t_0, 0)/\partial x = f'(-ct_0)$ と設定できるが、Smithの方法では無理である。　つまり、Smithの方法では、2通りの境界条件の組み合わせだけの箇数の全領域の計算を行わなければならないが、Cundallの方法では、境界領域だけで境界処理を済ましてしまうことができる。

[参考文献] 1) Smith W., 1974, A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys., 15, 492-503

2) Cundall P. A., et al., 1978, Solution of infinite dynamic problems by finite modelling in the time domain, Proc. 2nd. Int. Conf. Appl. Num. Modelling. Madrid



3次元半無限表面加振



3次元沖積層基盤加振