I-404　振動学的に推察されるＬｏｖｅ波の性質について

東京工業大学　総合理工　正　大町達夫

1．はじめに

"物理学の側から見ると表面波は強制振動ではなくて固有振動である。"[1] 従って表面波の性質は地盤の固有振動の性質と共通するものが多くあり、振動学の知識が地震波に含まれる表面波を理解する上で大いに役立つと思われるが、定量的なアプローチを具体的に試みた例は少ない。ここでは地盤のせん断振動を想定してＬｏｖｅ波の典型的な性質を振動学の観点から検討する。

2．固有振動数と分散曲線

最も単純な２層地盤としてＦＩＧ．１に示す水平２層構造を考える。下層は剛体とし、図のように座標系を定める。上層を伝播するＬｏｖｅ波の支配方程式は周知のように

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (1)$$

である。ただし $v=\sqrt{G/\rho}$ はせん断波速度である。

一方、ＦＩＧ．１でｘ＝０とｘ＝Ｌに剛な障壁を置くとき、この２つの障壁で囲まれる地盤（ＦＩＧ．２）のせん断自由振動の支配方程式も（１）で与えられる。この地盤振動の境界条件は

$$u_z|_{z=H} = 0, \quad u|_{z=0} = 0 \qquad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0 \qquad (3)$$

であり、これらを満たす固有円振動数として

$$\omega^2 = v^2\left\{\left(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\} \qquad (4)$$

が得られる。

Ｌｏｖｅ波の場合には（３）の境界条件は不要であり各モードの円振動数は次式で与えられる。

$$\omega^2 = v^2\left\{\left(\frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right\} \qquad (5)$$

ここでλは波長である。（４）と（５）とを比較すればＩ（４）でｎ＝２とおきＬをλと読み換えると両方の振動数が一致することが分る。これはＬｏｖｅ波の変位振幅の節においては（３）の条件が適合するため振動と波動の固有モードが一致することによるものである。従って（４）は本来ＦＩＧ．２の地盤がせん断振動する際の固有円振動数であるが、こうして求めた振動数や波速ｃ（＝円振動数ｘ波長）を、０＜Ｌ＜∞でＬを変化させて図示すれば同じ層構造をもつ地盤におけるＬｏｖｅ波の分散曲線が描けることになる（ＦＩＧ．３）。

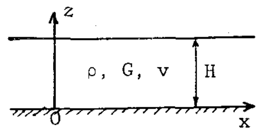

FIG. 1

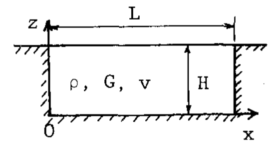

FIG. 2

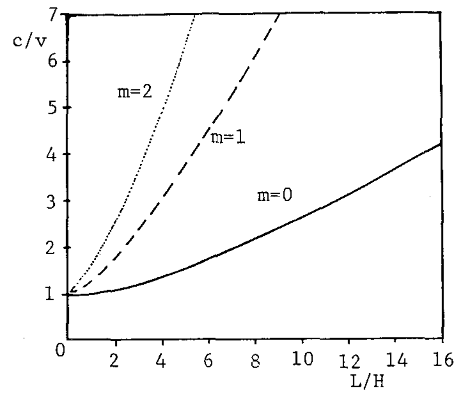

FIG. 3

3．固有振動形とＬｏｖｅ波の振幅分布

（５）の振動数をもつＬｏｖｅ波がＦＩＧ．１のｘ方向へ伝播するとき、ｘ＝Ｌに剛な障壁を置けばＬｏｖｅ波はそこで反射して－ｘ方向へ進む。このとき更にｘ＝０にも剛な障壁を置くとＬｏｖｅ波は再度反射してｘ方向へ進み、以後これらの障壁の間を何度も往復することになる。こうして種々の位相をもつ波動で長さＬの間は充満するが、逆位相のものは互いに消し合い同位相のものは互いに強め合うので最後には両端に節をもつ波動成分だけが残り定常振動状態を呈する。従ってこの地盤の固有振動変位は次式で表わされることがわかる。

$$u = \Sigma\Sigma\, C_{mn} \sin\frac{n\pi x}{L}\, \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\, e^{i\omega t} \quad (6)$$

（６）は前述のＬｏｖｅ波のうち波長が２Ｌ／ｎ（ｎは整数）の成分だけを集めたものである。

４．震源とＬｏｖｅ波の振幅の関係

ＦＩＧ．２の地盤の点（ｘ，ｚ）にｙ方向の外力ｆ（ｘ，ｚ，ｔ）が作用して地盤がせん断振動を始めるとき、運動方程式は次のように書ける。

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,z,t) \quad (7)$$

（６）の時間項をＱで置き換えて（７）に代入し、各項に$\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H}$を乗じて、$0 \leq x \leq L$，$0 \leq z \leq H$　で積分すれば

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega^2 Q_{mn}(t) = F_{mn}(t)/M_{mn} \quad (8)$$

ただし

$$F_{mn}(t) = \int_0^H \int_0^L f(x,z,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\, \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\, dx\, dz \quad (9)$$

$$M_{mn} = \int_0^H \int_0^L \rho \sin^2\frac{n\pi x}{L}\, \sin^2\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\, dx\, dz = \frac{\rho\pi^2}{8} n(2m+1) \quad (10)$$

となる。ここでQ_{mn}はモードｍ，ｎの振幅を表わす基準座標である。いま　ｘ＝Ｌ／２，ｚ＝z_0の点に単位衝撃力を加えるとすると

$$f(x,z,t) = \delta(x-L/2)\,\delta(z-z_o)\,\delta(t) \quad (11)$$

と書ける。ただしδはＤｉｒａｃのデルタ関数。（１１）を（９）に代入すれば

$$F_{mn}(t) = \sin\frac{(2m+1)\pi z_o}{2H}\,\delta(t) \quad (12)$$

となりモードｍ，ｎの変位振幅は次のように表わせる。

$$Q_{mn}(t) = \frac{8}{\rho\pi^2 n(2m+1)}\, \frac{1}{\omega}\, \sin\frac{(2m+1)\pi z_o}{2H} \sin\omega t \quad (13)$$

上で与えた単位衝撃力は全振動数成分を均等に含む外力であり、ω　は（４）で与えられる円振動数である。上式からＬｏｖｅ波にも共通する地盤振動の性質として次の点が指摘できる。

①基本モードの振幅が最大であり、モードの次数が高くなるにつれて振幅が減少する。

②震源の位置が深くなるにつれ観測される振幅は減少傾向を示すが、震源深さ付近にモード振幅の腹をもつ高次モードの振幅が相対的に大きくなる。

③震源のスペクトルに含まれない振動数範囲のモードは発生せず、震源のスペクトルが特定のモードの振動数付近で卓越していれば前記の①にかかわらずそのモードの振幅は大きくなる。

④下層が剛な場合には最大振幅は周期に比例する。

（１２）でｍ＝０、ｎ＝２とおき、そのときの周期をＴと書けば

$$\frac{Tv}{H} = \frac{4}{\sqrt{1+(4H/L)^2}} \quad (14)$$

となる。一定のｖとＨに対してはＬの増加とともにＴは増加するからそれに伴なって最大振幅も増加する。右辺の分母は必ず１よりも大きいからＴｖ／Ｈ＝４となることはないが、Ｔｖ／Ｈ＝４の付近すなわち層厚の４倍程度の波長をもつ成分の振幅が最大になるという、いわゆる１／４波長則が成立する。[2)]

以上の性質は下層が剛な２層構造についてのものであるが、剛性比が大きい２層構造についてもほぼ同様なことが言えるものと考えられる。

５．おわりに

上述のせん断自由振動解は畑中が突堤の自由振動に関して導いたものであり[3)]、振動問題に対する土木技術者の知識レベルはかなり高いものと思われる。我々に比較的なじみの薄い表面波についてはこれらの知識をフルに活用して理解を深めることも有意義と思われる。

６．参考文献

１）田治米：小爆破実験と表面波の研究、地震波の生成・伝搬に関する実験、１９７６、ｐ．８８

２）田治米：２層構造におけるＬｏｖｅ波の振巾分布、地震　１１、２０－２８、１９５８

３）畑中：突堤の自由振動について、土木学会誌、３６－１０、１９５１、ｐｐ．１１－１５