

室蘭工業大学 正員 松岡 健一
 同 同 岸 徳光
 北海道大学 同 能町 純雄

1. はじめに 弾性体中を伝播する弾性波による弾性体中の介在物周辺の応答問題は弾性波の入射角が円孔軸と角度をもつ場合には3次元問題となる。

著者らはこれまで、弾性体中におかれた厚肉円筒に斜め入射する弾性波による応答問題の解析を行ってきた。¹⁾ 本研究は、この問題を埋設パイプライン等の応答問題にも拡張するためにその基礎的問題として圧縮性の液体で満たされた円孔を有する弾性体が入射P波を受ける場合の応答問題に適用したものである。

2. 基礎変位式 図-1に示すように、無限体中に液体で満たされた円孔があり、円孔軸と角度φをなす方向からP波が入射する定常状態を考えるものとする。

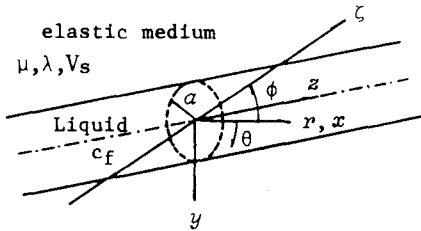


図-1 液体で満たされた無限体中の円孔

入射波の振巾を w_0 、角速度 ω 、入射波の進行速度を V_p とすれば、円孔を軸とする円柱座標を考えると入射P波の、半径、円周、軸方向の変位成分 $u^{(0)}$ 、 $v^{(0)}$ 、 $w^{(0)}$ は

$$u^{(0)} = -w_0 \exp[i\omega \{ t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p \}] * \sin \phi \cos \theta \quad (1)$$

$$v^{(0)} = w_0 \exp[i\omega \{ t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p \}] * \sin \phi \sin \theta \quad (2)$$

$$w^{(0)} = w_0 \exp[i\omega \{ t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p \}] * \cos \phi \quad (3)$$

となる。また円孔を有する無限体中を伝播する散乱波による変位は、定常状態を仮定し、波動方程式をフーリエ・ハンケル変換することによって求められ

$$u^{(1)} = \int_m c_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (4)$$

$$v^{(1)} = \int_m c_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (5)$$

$$w^{(1)} = \int_m c_m \tilde{W}_{mr} \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \chi_{mp} (N_p \mu^r) / N_p \mu \{ \alpha_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} \\ & + (m-1) B_{ma} - i N_p E_{ma} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \\ & * \{ \chi_{mp} (N_p \mu^r) / N_p \mu - N_p \alpha \chi_{mp} (N_p \alpha^r) / N_p^2 \} \\ & * \{ \beta_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} + (m+1) B_{ma} \\ & + i N_p E_{ma} \} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & -\chi_{ms} (N_p \mu^r) / N_p \mu \{ \alpha_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} \\ & + (m-1) B_{ma} + i N_p E_{ma} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \\ & * \{ \chi_{ms} (N_p \mu^r) / N_p \mu - N_p \alpha \chi_{ms} (N_p \alpha^r) / N_p^2 \} \\ & * \{ \beta_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} - (m-1) B_{ma} \\ & + i N_p E_{ma} \} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mr} = & G_m (N_p \mu^r) E_{ma} - i (2\mu N_p / \rho \omega^2) \\ & * \{ G_m (N_p \alpha^r) - G_m (N_p \mu^r) \} \{ \beta_{ma} / 2\mu \\ & + (m+1) A_{ma} - (m-1) B_{ma} + i N_p E_{mk} \} \end{aligned} \quad (9)$$

となり、ここで $c_0 = 1/2\pi$, $c_m = 1/\pi$, ($m=0$) t は時間であり、 $N_p = \omega \cos \phi / V_p$ である。さらに μ, λ をLameの定数、 ρ を弾性体の密度、 a を円孔の半径とし

$$N_p \mu = N_p^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_p \alpha = N_p^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$$

とする。また上式中の関数 G, χ はハンケル変換の逆変換によりえられる関数で

$$\begin{aligned} G_m(Nr) &= K_m(Nr) / K_m(Na) \\ \chi_{mp}(Nr) &= -K_{m+1}(Nr) / K_m(Na) \end{aligned} \quad (10)$$

$\chi_{ms}(Nr) = -K_{m-1}(Nr) / K_m(Na)$ 上式中の係数 $A_{ma}, B_{ma}, E_{ma}, \alpha_{ma}, \beta_{ma}$ は円孔内面の変位および応力で与えられる定数である。

3. 圧縮性液体の変位ポテンシャル 圧縮性液体の変位ポテンシャル Φ は、液体の密度 ρ_f 、音波の速度を c_f として、定常状態を考えれば、波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (11)$$

をハンケル変換を用いて解けば、液体の r 方向変位は

$$u_f = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sum_m c_m \{ N_f \chi_{mp}^f(N_f r) + \frac{m}{r} G_m^f(N_f r) \} * \tilde{\Phi}_{ma} \cos m \theta \exp [i(\omega t - N_p z)] \quad (12)$$

ここで、 $\chi_{mp}^f(N_f r) = I_{m+1}(N_f r) / I_m(N_f r)$ (13)

また液体の圧力は

$$p_f = -\rho_f \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho_f \omega^2 \sum_m c_m G_m^f(N_f r) \tilde{\Phi}_{ma} * \omega m \theta \exp [i(\omega t - N_p z)] \quad (14)$$

となり、 $\tilde{\Phi}_{ma}$ は未知定数である。

4. 境界条件 係数 A_{ma} 、 B_{ma} は次の適合条件を足しなければならない。

$$A_{ma} = A_{mr} |_{r=a/a} \quad (15) \quad B_{ma} = B_{mr} |_{r=a/a} \quad (16)$$

さらに液体と弾性体との境界では

$$\tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(0)} |_{r=a} = 0 \quad (17)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} + \tau_{rz}^{(0)} |_{r=a} = 0 \quad (18)$$

$$\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(0)} |_{r=a} = -p_f |_{r=a} \quad (19)$$

$$u^{(1)} + u^{(0)} |_{r=a} = u_f |_{r=a} \quad (20)$$

を満足しなければならない。

5. 数値解折例 数値計算例として、弾性体のポアソン比 $\nu=0.25$ 、 $c_f/V_b=1.5$ ($V_b=\sqrt{E/\rho}$ E : 弾性係数)、入射角 $\phi=\pi/4$ として $\rho_f/\rho=0.3, 0.5, 0.7$ とした場合の計算と、 $\rho_f/\rho=0.5$ として $\phi=0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ とした場合の計算を行ない、その結果を図-2~4に示した。

いずれの図も横軸に無次元化した振動数を取り、縦軸は同じ振動数の P 波が無限弾性体を伝わる時の同じ位置における変位及び応力 ($u_0, \sigma_{\theta 0}$) を基準とした倍率で示した。また図中の一点鎖線は中空円孔の場合の値である。図-2は、円孔面における半径方向変位の応答値を、液体の密度を変化させて示したものである。振動数によって液体の密度の影響は異なるが、中空の場合に比べると、小さい。

図-3, 4には、円孔面の円周方向応力を示した。これは一種の応力集中係数であるが、液体の密度の変化による影響はこの範囲ではあまり大きくなく(図-3)、入射角の変化によっては値がかなり変化し、軸と角度を持っている時、特に $\phi=\pi/4$ のとき一番大きい(図-4) ようである。

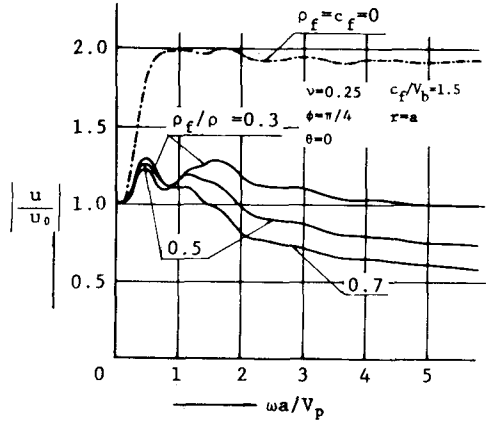


図-2 半径方向変位 u の変化

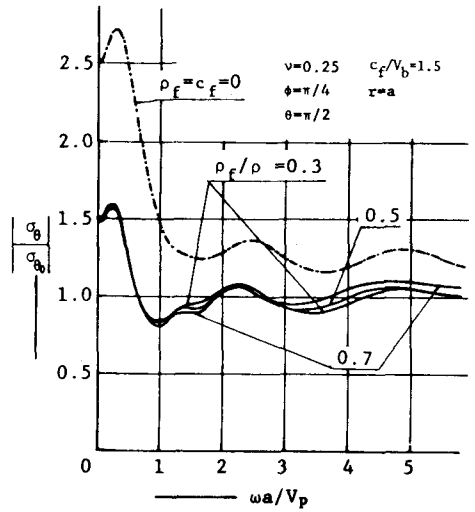


図-3 円周方向応力 σ_{θ} の変化

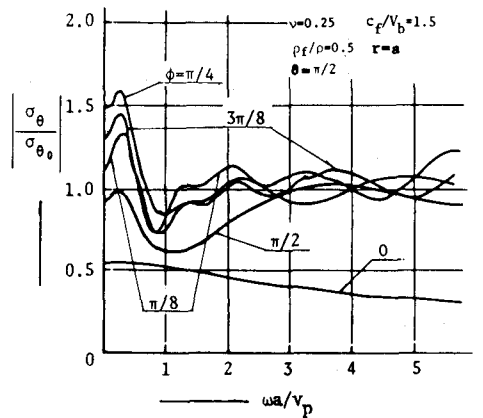


図-4 円周方向応力 σ_{θ} の変化

※参考文献 1) 松岡、岸、能町：土木学会北海道支部論文報告集 No.39. 4/1. 1983