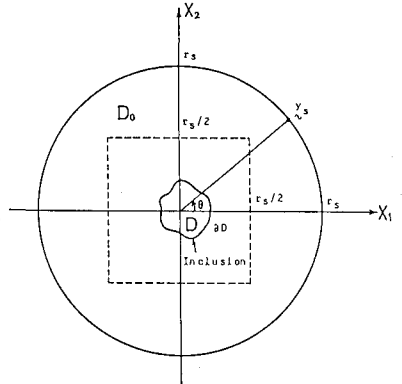


京都大学大学院 学生員 喜多秀樹
 京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 廣瀬壮一

1. はじめに

従来より、弾性体の物性値を手えて波動の伝播特性を明らかにする問題は数多く解析されてきた。そのような問題を‘順問題’と言うことにするならば、逆に、得られた波動を解析して、弾性体内に存在する物質の形状、およびその物性値を求める問題はその逆問題と言える。

本研究は積分方程式法による逆問題の解析の第一歩として、異質物(Inclusion)が無限均質弾性体内に存在するモデルについて、その散乱波からInclusionの形状、ならびに特性を明らかにしようとするものである。



2. 解析モデル (Fig. 1参照)

- i) 基盤 D_0 は無限均質等方弾性体であり、そのせん断剛度を μ_0 、密度を ρ_0 とする。
 - ii) 基盤 D_0 内にせん断剛度、密度の異なる均質等方弾性体 D (Inclusion) が存在し、そのせん断剛度を μ 、密度を ρ とする。
 - iii) 2次元定常面外波動 (SH波) 問題についてとり扱う。
 - iv) 入射波 u^i は点 y_s における集中物体力を震源とする球面波である。ただし、点 y_s は Inclusion D の大きさより十分大きいと思われる半径 r_s の円にあるものとする。
 - v) 震源と同じ点 y_s で散乱波を観測するものとする。
 - vi) 基盤 D_0 と Inclusion D の境界 ∂D において、変位、および応力ベクトルは連続である。
- 以上の仮定、およびモデル化のもとで、境界積分方程式法により、点 y_s における散乱波変位 $u^s(y_s)$ を数値的に求め、逆問題への入力データとした。

3. 逆問題としての定式化

まず、せん断剛度と密度を、 $\mu(x) = \mu_0 + \mu_c$ 、 $\rho(x) = \rho_0 + \rho_c$ ($x \in D$) と表す。ただし、 μ_c 、 ρ_c はそれぞれ μ_0 、 ρ_0 からの増分である。そして、散乱波変位 $u^s(y_s)$ の満たす基礎式に、動弾性の式を満たす基本解 $U(y_s, y)$ を用いて積分方程式を構成し、さらに発散定理、境界条件等を用いて式の変形を進めると、次の積分方程式が得られる。

$$u^s(y_s) = - \int_{\partial D} \mu \nabla_T U(y_s, y) \cdot \nabla_T u^s(y_s) dS_y + \int_D U(y_s, y) \rho_c \omega^2 u(y) dS_y \quad (1)$$

ただし、 ω は角振動数、 u は全変位を表す。

4. Farfield近似、Born近似、および特性関数の導入

① 式を逆問題として解析するために、 $|y_s| = r_s \gg |y|$ と仮定すれば、 $|y_s - y| = |y_s| - \hat{y}_s \cdot y$ と近似できる。ただし、 $\hat{y}_s$ は単位ベクトルを表す。(Farfield近似) また、Inclusion D 内では、①式近似として、 D 内の変位が入射波の変位に等しい、すなわち、 $u(y) \approx u^i(y)$ ($y \in D$) と近似する。(Born近似)

以上の仮定から、①式は次のように変形できる。

$$u^s(y_s) = \frac{i}{8\pi r_s} k \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} + \frac{\rho_c}{\rho_0} \right) e^{2ikr_s} \int_D e^{-i(2kr_s)\cdot y} dS_r \quad (2)$$

ここで、 $\delta(X)=1 (X \in D)$, $0 (X \in D_0)$ なる場所の関数を定義し、(これを特性関数と呼ぶ) この関数のフーリエ変換を考えると、

$$\delta(q) = \int_{D+D_0} \delta(X) e^{-i q \cdot X} dS_X = \int_D e^{-i q \cdot X} dS_X \quad (3) \text{ となり、これは、(2)}$$

式右辺の積分と、 $q = 2kr_s$ の関係の下で全く同値である。従って、 $\delta(X)$ の逆フーリエ変換を考えると、特性関数と $u^s(y_s)$ を、次のように結びつけることができる。

$$\delta(X) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{8\pi r_s}{k} \frac{1}{\frac{\mu_c}{\mu_0} + \frac{\rho_c}{\rho_0}} e^{-2ikr_s} u^s(y_s) \right] e^{i(a_1 X_1 + a_2 X_2)} da_1 da_2 \quad (4)$$

すなわち、散乱波変位 $u^s(y_s)$ を入力データとして、④式に代入して積分することにより、 $\delta(X)$ が明らかとなり、 $\delta(X)$ の分布より Inclusion D の形状が表現できる。

ところで、一般には、Inclusion D 内の物性値 μ , ρ は未知である。したがって、④式では、 μ_c/μ_0 , および ρ_c/ρ_0 の2つが未知量となるが、この式においては、この2つの未知量は独立でないで、 $\delta(X)$ の分布だけしか求めることができない。そこで簡単のために、密度の増分 $\rho_c \geq 0$ として解析を行ない、せん断剛度 μ を求めることにした。 $\rho_c \geq 0$ の場合、④式は次のようになる。

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} \cdot \delta(X) = \frac{8}{\pi} r_s i \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2ikr_s} u^s(y_s) e^{i2k(X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta)} dk d\theta \quad (5)$$

ただし、 $2kr_s = (2k \cos\theta, 2k \sin\theta)$ の関係のもとで、極座標変換を行った。

5. 数値解析例と結果、考察

Fig.2のように、Inclusion D が円形で、その中心が原点と一致する場合については、明らかに半径 r_D の円上のどの点についても同じ散乱波が得られるので、横軸に半径方向、縦軸に $\mu_c/\mu_0 \cdot \delta(X)$ をとり、各パラメタが特性関数に与える影響を調べた。その結果の一例を、Fig.3～Fig.5に示した。なお、破線は求められべき特性関数の形を表す。結果として最も注目すべき事は、 $0.5 < \mu_c/\mu_0 < 2.0$ 程度の範囲内でのみ $\delta(X)$ がうまく描け、その他ではよい結果は得られないという事である。これはBorn近似で、 $u(y) \approx u^s(y)$ としたためと思われる。また、Farfield近似に関しては、 y_s が Inclusion D にかかり近づけても、ある程度の結果が得られる事が明らかにになった。なお、Dの形状が「円」である場合の特性関数の分布の一例をFig.6に示す。

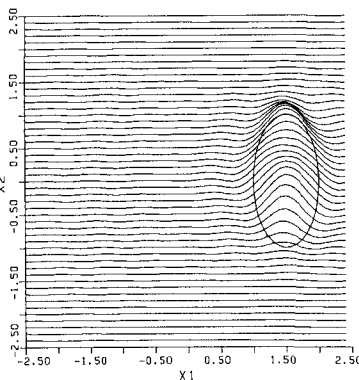


Fig.6 Characteristic Function (ellipse)

$\mu_0/\mu = 0.7, \alpha = 0.5$

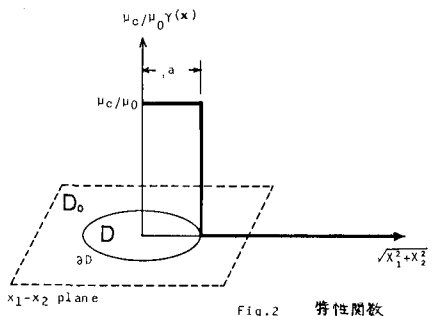


Fig.2 特性関数

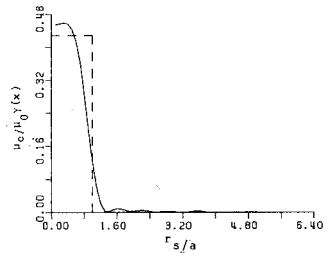


Fig.3 Characteristic Function

real = 0.42857 $\mu_0/\mu = 0.7$
 μ_c/μ_0 mean = 0.43535 $r_s/a = 5.0$
 max = 0.45841 $k = 0.1 \sim 5.0$

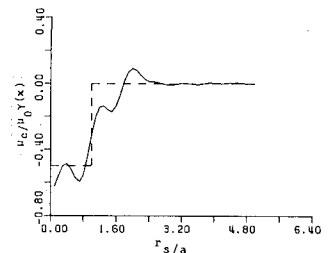


Fig.4 Characteristic Function

real = 0.50000 $\mu_0/\mu = 2.0$
 μ_c/μ_0 mean = 0.53961 $r_s/a = 5.0$
 min = 0.61960 $k = 0.1 \sim 5.0$

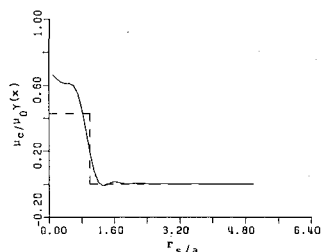


Fig.5 Characteristic Function

real = 0.42857 $\mu_0/\mu = 0.7$
 μ_c/μ_0 mean = 0.61425 $r_s/a = 1.5$
 max = 0.66291 $k = 0.1 \sim 5.0$

Norman Breistein; Direct image reconstruction of anomalies in a plane via physical optics farfield inverse scattering, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 59 No. 6, pp. 1259-1262, 1976.

(参考文献)