

東北大学工学部 ○正員 中島章典

東北大学工学部 正員 倉西 茂

1. はじめに

構造物の限界状態設計を行う立場などから、動的解析においても弾塑性を考慮した解析を行うことが多くなってきている。この動的弾塑性解析を行う場合には、直接数値積分法が一般に用いられている。線形動的応答解析に種々の数値積分法を適用する場合の精度については、いくつか研究^{1), 2)} がなされているが、非線形解析に適用する場合についてはあまり研究が行われていない。

そこで本研究では、直接数値積分法として、Newmarkの β 法 ($\beta = 1/4, 1/6$: 線形加速度法)、Wilsonの θ 法 ($\theta = 1.4$)、4次のRunge-Kutta法を用いて、2自由度弾塑性解析を行い、各数値積分法の精度を厳密解と比較することにより検討した。

2. 解析モデル

対象とした2自由度解析モデルは、図-1に示すようなせん断型質点バネ系モデルとし、バネの復元力特性は図-2に示すような完全弾塑性型とする。粘性減衰の影響を無視すると振動モデルの運動方程式は、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + R_1 + R_2 &= f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + R_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに復元力 R_i は、バネの弾性・塑性に応じて、

$$\begin{aligned} R_i &= \pm R_{iy} - k_i (Y_{im} - Y_i) : \text{弾性} \\ &\pm R_{iy} : \text{塑性} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

と表せる。ここで、 R_{iy} は降伏復元力、 k_i はバネ定数、 $Y_1 = x_1$ 、 $Y_2 = x_2 - x_1$ (相対変位)、 Y_{im} は復元力を求める基準となる塑性変位である。質点に作用する外力 f_i は、

$$f_i = P \sin \omega_f t \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

と表される正弦波外力とする。

3. 解析結果

本研究では、表-1の諸元を持つ場合についてだけ解析した。この計算例では、振動モデルの下の方のバネだけが塑性化する。図-3には、質点1、2の変位応答、加速度応答の厳密解を示す。縦軸が変位応答 (塑性変位によって無次元化)、加速度応答を、横軸が経過時間を外力の周期で無次元化して表している。実線が質点1、破線が質点2の応答である。正弦波外力の振動数が1次固有振動数に非常に接近した場合であるので、共振現象によって応答の振幅が増加する。しかし、バネが塑性化するとしだいに定常的な振動となっている。加速度応答ではバネが塑性化した後、質点1の応答の2次波形の影響が非常に大きくなっていることがわかる。

図-4、5には、質点2の変位応答だけについて、数値積分の時間刻み Δt を外力の周期の $1/64, 1/16$ とした場合の結果を示す。○、◇、×、+がそれぞれNewmarkの β 法 ($\beta = 1/4, 1/6$)、Runge-Kutta法、Wilson

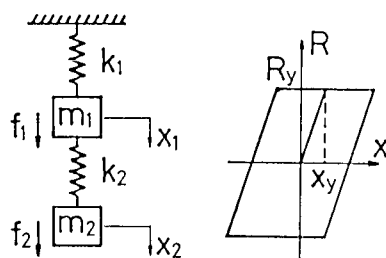
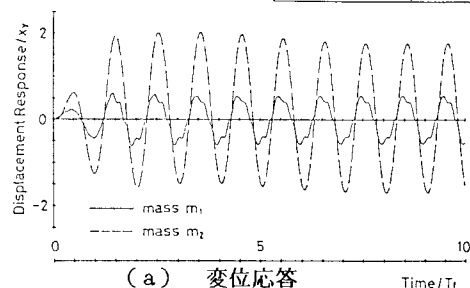


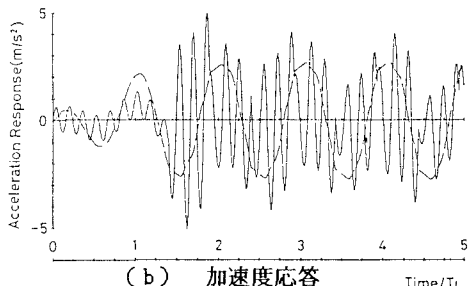
図-1 振動モデル 図-2 復元力特性

表-1 解析モデルの諸元

$m_1=1, m_2=8(\text{kg})$
$k_1=4, k_2=2(\text{kN/m})$
$\omega_1=12.82(\text{rad/s})$
$\omega_2=78.01(\text{rad/s})$
$R_{2y}=20, P=4(\text{N})$
$\omega_f=12.75(\text{rad/s})$



(a) 変位応答



(b) 加速度応答

図-3 振動モデルの応答の厳密解

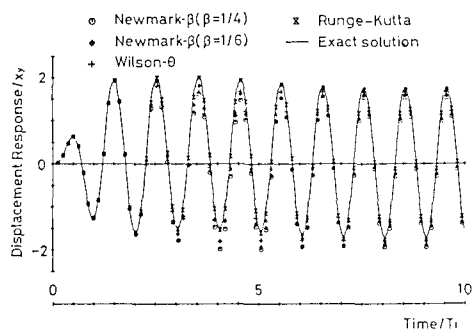


図-4 質点2の変位応答 ($\Delta t = T_f/64$)

の θ 法によるものであり、実線が厳密解である。数値積分法による結果は、1 サイクルについて8 点だけを描いている。バネが塑性化して以降、いずれの手法も振動振幅が厳密解に対して下方に移動した結果となっている。その中では、Runge-Kutta 法による結果が最もよく厳密解に一致しているのに対して、他の計算手法による結果はいずれの場合も下方にずれている。しかし定常状態における両振幅の大きさは厳密解によく一致している。

図-6 は、 $\Delta t = T_f/64$ のときの Runge-Kutta 法と Newmark の β 法 ($\beta = 1/4$) による質点1の加速度応答の結果を厳密解とともに示している。Runge-Kutta 法による結果がよく厳密解に一致しているのに対して、Newmark の β 法による結果は振幅がかなり大きくなっている。

各数値積分法の精度を評価するために、応答波形のフーリエ変換を行ない、フーリエスペクトルの値を比較した。図-7 には、Newmark の β 法 ($\beta = 1/4$)、 $\Delta t = T_f/32$ による質点2の変位応答のフーリエスペクトルを破線で示している。比較のために実線で、Runge-Kutta 法、 $\Delta t = T_f/128$ による結果も示す。縦軸はスペクトル値を、横軸は振動数を、それぞれ Runge-Kutta 法によるスペクトルの最大値、外力の振動数で無次元化して示している。外力の振動数におけるピーク値の差が振幅誤差を表していると考えられるが、両者はよく一致している。また、低い振動数のスペクトル値の差は振幅の移動に関する誤差を表していると考えられる。図-8 は、各数値積分法の精度として、図-7 のピーク値を比較したものである。縦軸はピーク値を、Runge-Kutta 法 ($\Delta t = T_f/128$) によるピーク値で、横軸は振動数を、外力の振動数で無次元化して表している。時間刻みの大きさが小さい場合には、Runge-Kutta 法による結果が最もよい。しかし、 $\Delta t = T_f/8$ では線形加速度法とともに解が発散している。Newmark の β 法 ($\beta = 1/4$) は、時間刻みの大きさによらず比較的よい精度を有している。

《参考文献》

- 1、水田・西山・平井：Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法、土論集、268号、pp.15~21、1977-12
- 2、清水・渡辺他：大次元常微分方程式の直接数値積分法、機論集、pp.1272~1289、1977-4

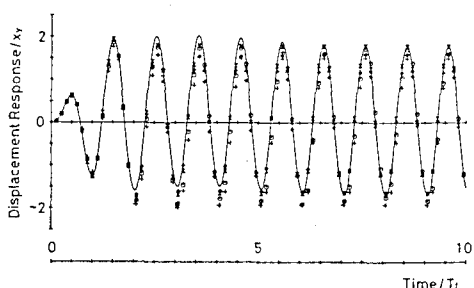


図-5 質点2の変位応答 ($\Delta t = T_f/16$)

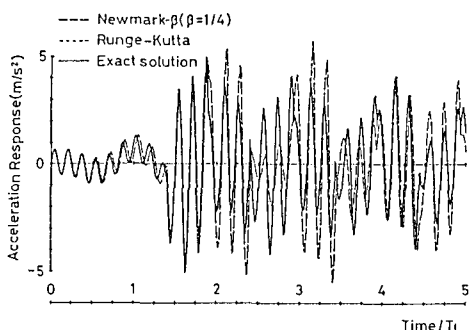


図-6 質点1の加速度応答 ($\Delta t = T_f/64$)

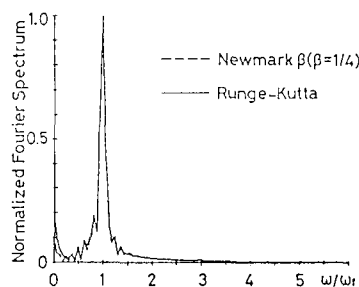


図-7 フーリエスペクトル

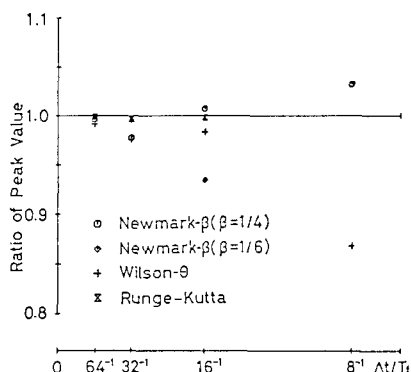


図-8 スペクトルのピーク値の比較