I-357　多地点入力に関する応答共分散漸化式の誘導

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝
武蔵工業大学　学生員　○渋沢　重彦

1．はじめに

不規則振動論を用いた振動解析では，確率過程入力に対する応答として共分散応答が得られ，さらにこの共分散応答を最大応答理論に用いることによって，構造物の最大応答量を確率的に評価することができる。ところで橋梁や地中埋設パイプラインなどの長大構造物を対象にこのような振動解析を行なう際には，互いに相関を有した多地点入力を考慮する必要がある。そこで，本研究では，既に著者らが提案している応答共分散漸化式[1]をもとに，長大構造物に互いに相関を有する多地点入力が作用した場合の応答共分散を，効率良く算出する理論式の誘導を試みた。

2．振動方程式[2]

減衰を考慮した質点系の振動方程式は次式で与えられる。

$$\mathbb{F}\mathbb{M}\ddot{\mathbb{x}} + \mathbb{F}\mathbb{C}\dot{\mathbb{x}} + \mathbb{x} = \mathbb{F}_o\mathbb{z}_o \tag{1}$$

ただし，$\mathbb{M}$：質量マトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{C}$：粘性係数マトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{F}$：質点に作用する単位外力に対する質点変位の影響マトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{F}_o$：支点の単位変位に対する質点変位の影響マトリックス$(n\times m)$，$\mathbb{x}$：応答変位ベクトル$(n\times 1)$，$\mathbb{z}_o$：各入力点の強制変位ベクトル$(m\times 1)$，n：構造物の自由度，m：入力点数

(1)式の解$\mathbb{x}$を動的応答変位と支点の静的応答変位の和として次のように置く。

$$\mathbb{x} = \mathbb{\Phi}\mathbb{y} + \mathbb{F}_o\mathbb{z}_o \tag{2}$$

ただし，$\mathbb{\Phi}$：振動モードマトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{y}$：一般化座標ベクトル$(n\times 1)$

ここで，(2)式を(1)式に代入して整理すると次式が得られる。

$$\ddot{\mathbb{y}} + \mathbb{H}\dot{\mathbb{y}} + \mathbb{\Omega}^2\mathbb{y} = -\mathbb{R}\ddot{\mathbb{z}}_o - \mathbb{S}\dot{\mathbb{z}}_o \tag{3}$$

ただし，$\mathbb{H}$：$2\beta_i\omega_i$を対角要素とするマトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{\Omega}$：ω_iを対角要素とするマトリックス$(n\times n)$，$\mathbb{R}$および$\mathbb{S}$：各支点へのそれぞれ加速度入力，速度入力に対する各次モードのモード寄与率を要素とするマトリックス$(n\times m)$，β_i：i次モードの減衰定数，ω_i：固有円振動数

(3)式は，各次モードに対応する式に分離できる。すなわち，第i次モードの一般化座標y_iは次式で表わされる。

$$\ddot{y}_i + 2\beta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\sum_{\ell=1}^{m} R_{i\ell}\ddot{z}_{o\ell} - \sum_{\ell=1}^{m} S_{i\ell}\dot{z}_{o\ell} \tag{4}$$

さらに，(4)式を，$t=k\cdot\Delta t$で離散化し，線形加速度法より求めた解をマトリックス表示すると次式のようになる。

$$\mathbb{\eta}_i(k+1) = \mathbb{G}_i\mathbb{\eta}_i(k) + \mathbb{E}_i\ddot{\mathbb{z}}_o(k+1) + \mathbb{D}_i\dot{\mathbb{z}}_o(k+1) \tag{5}$$

ただし，$\mathbb{\eta}_i(k)=[y_i(k)\ \ \dot{y}_i(k)\ \ \ddot{y}_i(k)]^T$，$\mathbb{G}_i$，$\mathbb{E}_i$，$\mathbb{D}_i$：$\beta_i$，$\omega_i$，$\Delta t$，$R_{i\ell}$，$S_{i\ell}$から成る$(3\times 3)$，$(3\times m)$，$(3\times m)$のマトリックス

3．多地点地震動入力の確率過程モデル

地震動加速度入力$\ddot{z}_{or}(k)$を，互いに相関を有するように時間領域の多次元非定常ARモデルで表現する。

$$\ddot{z}_{or}(k) = \sum_{p=1}^{r}\sum_{j=1}^{M} a_{brp}(j,k)\ddot{z}_{op}(k-j) + a\varepsilon_r(k)\ \ :\ \ t=k\cdot\Delta t,\ \ r=1,2,\cdots,m \tag{6}$$

(6)式において$\ddot{z}_{or}(k)$は，$E[\ddot{z}_{or}(k)=0]$の確率過程である。$a_{brp}(j,k)$は，$\ddot{z}_{or}(k)$の周波数の非定常性を決定する確定関数である。また，$a\varepsilon_r(k)$は，$E[a\varepsilon_r(k)=0]$であり，$\ddot{z}_{or}(k)$の振幅の大きさ，形状を決定する非定常ホワイトノイズである。

$E[a\varepsilon_r(k)a\varepsilon_s(\ell)]=0\ (k\neq\ell)$，$a\sigma_{rs}^2(k)\ (k=\ell)$，　MはARモデルの次数である。

(6)式と同様に，速度入力$\dot{z}_{or}(k)$，変位入力$z_{or}(k)$に関しても次のようにモデル化することができる。

$$\dot{z}_{or}(k) = \sum_{p=1}^{r}\sum_{j=1}^{M} v_{brp}(j,k)\dot{z}_{op}(k-j) + v\varepsilon_r(k)\ \ :\ \ t=k\cdot\Delta t,\ \ r=1,2,\cdots,m \tag{7}$$

$$z_{or}(k) = \sum_{p=1}^{r}\sum_{j=1}^{M} d_{brp}(j,k)z_{op}(k-j) + d\varepsilon_r(k)\ \ :\ \ t=k\cdot\Delta t,\ \ r=1,2,\cdots,m \tag{8}$$

ただし，各入力点において，$\ddot{z}_{or}(k)$，$\dot{z}_{or}(k)$，$z_{or}(k)$が互いに完全相関を有していなければならない。$a\varepsilon_r(k)$，$v\varepsilon_r(k)$，$d\varepsilon_r(k)$についても同様である。ここで，(6)，(7)，(8)式を応答共分散漸化式に組み込むために，それぞれ次式のように状態空間表示する。（ここでは，加速度入力についてのみ示す。）

$$\underset{(mM\times 1)}{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbb{z}}_{o1}(k) \\ \ddot{\mathbb{z}}_{o2}(k) \\ \vdots \\ \ddot{\mathbb{z}}_{om}(k) \end{bmatrix}} = \underset{(mM\times mM)}{\begin{bmatrix} a\mathbb{B}_{11}(k) & & & \mathbb{0} \\ a\mathbb{B}_{21}(k) & a\mathbb{B}_{22}(k) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a\mathbb{B}_{m1}(k) & a\mathbb{B}_{m2}(k) & \cdots\cdots & a\mathbb{B}_{mm}(k) \end{bmatrix}} \underset{(mM\times 1)}{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbb{z}}_{o1}(k-1) \\ \ddot{\mathbb{z}}_{o2}(k-1) \\ \vdots \\ \ddot{\mathbb{z}}_{om}(k-1) \end{bmatrix}} + \mathbb{V} \underset{(m\times 1)}{\begin{bmatrix} a\varepsilon_1(k) \\ a\varepsilon_2(k) \\ \vdots \\ a\varepsilon_m(k) \end{bmatrix}} \qquad (9)$$

ただし，

$$\underset{(M\times 1)}{\ddot{\mathbb{z}}_{or}(k)} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_{or}(k) \\ \ddot{z}_{or}(k-1) \\ \ddot{z}_{or}(k-2) \\ \vdots \\ \ddot{z}_{or}(k-M+1) \end{bmatrix} \quad \underset{\substack{(i=j) \\ (M\times M)}}{a\mathbb{B}_{ij}(k)} = \begin{bmatrix} abij(1,k) & abij(2,k) & \cdots & abij(M-1,k) & abij(M,k) \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\substack{(i\neq j) \\ (M\times M)}}{a\mathbb{B}_{ij}(k)} = \begin{bmatrix} abij(1,k) & \cdots & abij(M,k) \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{(mM\times m)}{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & & \mathbb{0} \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \\ \mathbb{0} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

4．応答共分散漸化式

(9)式のように状態空間表示された(6)，(7)，(8)式と(5)式を結合して，次式のような状態方程式を作成する。

$$\mathbb{W}_i(k+1) = \mathbb{T}_i(k+2)\mathbb{W}_i(k) + \mathbb{U}\boldsymbol{\varepsilon}(k+2) \qquad (10)$$

ただし，$\mathbb{W}_i(k)$：入力，応答を要素とする状態ベクトル[$(3+3mM)\times 1$]，$\mathbb{T}_i(k+2)$：状態ベクトル$\mathbb{W}_i(k)$から$\mathbb{W}_i(k+1)$への移行を規定する非定常遷移マトリックス[$(3+3mM)\times(3+3mM)$]，$\boldsymbol{\varepsilon}(k)$：非定常ホワイトノイズベクトル($3m\times 1$)，$\mathbb{U}$：マトリックス$\mathbb{V}$によって構成されたマトリックス[$(3+3mM)\times 3m$]

ここで，i次モードおよびj次モードに対応する状態ベクトル$\mathbb{W}_i(k+1)$と$\mathbb{W}_j(k+1)$の積の期待値を求める。

$$E[\mathbb{W}_i(k+1)\mathbb{W}_j^T(k+1)] = \mathbb{T}_i(k+2)E[\mathbb{W}_i(k)\mathbb{W}_j^T(k)]\mathbb{T}_j^T(k+2) + \mathbb{T}_i(k+2)E[\mathbb{W}_i(k)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k+2)]\mathbb{U}^T + \mathbb{U}E[\boldsymbol{\varepsilon}(k+2)\mathbb{W}_j^T(k)]\mathbb{T}_j^T(k+2) + \mathbb{U}E[\boldsymbol{\varepsilon}(k+2)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k+2)]\mathbb{U}^T \qquad (11)$$

また，ARモデルのホワイトノイズ入力$\boldsymbol{\varepsilon}(k)$の独立性を考慮すると，(11)式の右辺第２，３項は，

$$E[\mathbb{W}_i(k)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k+2)] = E[\boldsymbol{\varepsilon}(k+2)\mathbb{W}_j^T(k)] = 0 \qquad (12)$$

となる。したがって，(11)式は，次のように書き直すことができる。

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k+1) = \mathbb{T}_i(k+2)\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k)\mathbb{T}_j^T(k+2) + \mathbb{U}\boldsymbol{\sigma}^2(k+2)\mathbb{U}^T \qquad (13)$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k) = E[\mathbb{W}_i(k)\mathbb{W}_j^T(k)]$：応答共分散マトリックス[$(3+3mM)\times(3+3mM)$]，$\boldsymbol{\sigma}^2(k)$：非定常ホワイトノイズの共分散マトリックス($3m\times 3m$)

(13)式に初期値$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(0)$を与えることにより，各時刻の応答共分散が，$\boldsymbol{\sigma}^2(k)$を入力としたかたちで漸化的に求められる。たとえば，変位応答$\boldsymbol{x}$の応答共分散は，$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k)$の要素を用いることにより次のようにして算出できる。

$$E[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}^T(k)] = \boldsymbol{\Phi}E[\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^T(k)]\boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Phi}E[\boldsymbol{y}(k)\mathbb{z}_o^T(k)]\mathbb{F}_o^T + \mathbb{F}_oE[\mathbb{z}_o(k)\boldsymbol{y}^T(k)]\boldsymbol{\Phi}^T + \mathbb{F}_oE[\mathbb{z}_o(k)\mathbb{z}_o^T(k)]\mathbb{F}_o^T \qquad (14)$$

また，入力が定常の場合には，ARモデルの係数$b_{rp}(j,k)$は時間に関して不変，すなわち，$b_{rp}(j)$（一定）となりホワイトノイズも一定の共分散値を持つため，(13)式は次式のように書き直すことができる。

$$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k+1) = \mathbb{T}_i\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k)\mathbb{T}_j^T + \mathbb{U}\boldsymbol{\sigma}^2\mathbb{U}^T \qquad (15)$$

(15)式において十分時間が経過した後は$\boldsymbol{\alpha}_{ij}(k+1) = \boldsymbol{\alpha}_{ij}(k)$（一定）となるために，$\boldsymbol{\alpha}_{ij}$を代数的に求めることができる。

5．おわりに

この漸化式を用いれば，橋梁や地中埋設パイプラインなど長大構造物の複雑な応答の理論解を，効率良く算出することができる。なお，実際の数値計算例は講演の際に示すこととする。

参考文献

1)星谷・石井・永田：応答共分散漸化式の誘導と応用，土木学会論文報告集，No.３４１，１９８４－１，2)青柳：地震動の位相差を考慮した長大吊橋の地震応答について，土木学会論文報告集，No.１９０，１９７１－６．