

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎
北海道大学工学部 正員 渡 辺 昇

1. まえがき

構造物の動的応答は、構造物に作用する外力の性質と構造物の固有振動性状、すなわち固有振動数、固有振動モード(固有関数)、振動減衰などによって決定される。特に走行荷重による多径間連続桁の動的応答性状および衝撃係数の問題では、車両の振動特性、速度、路面の平滑性なども重要な因子となるが、連続桁の径間数の増加にともない必然的に高次の固有振動モードが動的応答値を支配する要因となってくる。このような意味で、多径間連続桁の固有振動数および固有関数を低次振動モードから高次振動モードまで精度よく計算することは重要な意義をもつと考えられる。

構造物の固有振動解析は構造物のモデル化によって、離散座標系(discrete coordinate system)と分布座標系(distributed coordinate system)による解に分類される。さらに、前者には質量マトリックスの構成方法によって、集中質量法(lumped mass method)と整合質量法(consistent mass method)による2通りの解析手法があり、後者には構造物の質量、剛性などの力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法(continuous mass method)がある。この連続質量法は自由振動の基礎微分方程式の一般解を必要とするが、正確な固有値(厳密解)を求めることができる。

そこで、本研究はまず第一に、任意径間数および任意支持条件の多径間連続桁の固有値を連続質量法により求める計算方法について示す。次に、具体的な数値計算例を用いて、従来の集中質量法および整合質量法により求められた解析結果との比較を行ない、その精度について考察する。

2. 連続質量法

ここでは、最も基本的なBernoulli-Euler桁の曲げ振動について考える。その基礎微分方程式は式(1)のように与えられる。ここで、EIは桁の曲げ剛性、 w は桁の重量、 g は重力加速度、 η は動的たわみを表わす。この微分方程式の解を変数分離して表現すれば式(2)のようになり、これを式(1)に代入すると変数 x に関する常微分方程式が式(3)のように得られる。ここで $X(x)$ は桁の固有関数であり、 $q(t)$ は一般化座標である。また、式(4)で ω は桁の固有円振動数を表わす。

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\eta(x, t) = X(x)q(t) \quad (2)$$

$$X^{(4)}(x) = \beta^4 X(x) \quad (3)$$

$$\beta^4 = \frac{w \omega^2}{g EI} \quad (4)$$

次に、式(3)の一般解は

$$X(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad (5)$$

と求められる。ここで、 A, B, C, D は積分定数であり、連続桁の境界条件によって決定される。 $x=0$ における変位および断面力を積分定数を用いてマトリックス表示し、同様にして $x=l$ における変位および断面力の状態量ベクトルを積分定数でマトリックス表示する。この両式から積分定数ベクトルを消去し断面力を変位で表現すると次のようなマトリックス関係式が得られる。¹⁾

$$F = KU \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Symmetric} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} k_{11} = K(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda); & k_{12} = -K(\sin \lambda \sinh \lambda)/\beta; \\ k_{13} = -K(\sin \lambda + \sinh \lambda); & k_{14} = K(\cos \lambda - \cosh \lambda)/\beta; \\ k_{22} = K(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda)/\beta^2; & k_{23} = -k_{14}; & k_{24} = -K(\sin \lambda - \sinh \lambda)/\beta^2; \\ k_{33} = k_{11}; & k_{34} = -k_{12}; & k_{44} = k_{22}; & K = EI\beta^3/(1 - \cos \lambda \cosh \lambda) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 K は 4×4 の正方対称マトリックスである。ここでは特に、 K は固有値 $\lambda = \beta l$ を含む剛性マトリックスであることから、「固有剛性マトリックス」と呼ぶことにする。

この固有剛性マトリックス K は静的問題の剛性マトリックスと全く同様にして、重ね合せの原理を用いることが可能であり、容易に電子計算機のプログラム化ができる。さらに、座標変換を加味すれば、

ラーメン橋、アーチ橋などの骨組構造物への応用も可能となる。

式(7)で示した個々の部材要素に対する固有剛性マトリックスの重ね合せにより、連続桁全体の剛性方程式を作成する。さらに、拘束節点変位の処理を行なうと、最終的に多径間連続桁の振動数方程式は次のようになる。

$$\det | K_{\alpha\alpha} | = 0 \quad (8)$$

これは、固有値λに関する超越方程式となるが、電子計算機の高速化により、また Regula-Falsi法²⁾を適用することにより正確な解を求めることができる。

3. 数値計算例と考察

数値計算例として、等断面等支間長をもつ連続桁の / 次から20次までの固有値λが表一 / に示されている。ただし、連続桁の両端の境界条件は単純支持である。多径間連続桁の第 / 次固有値λ₁は径間数に関係なく常に一定であり、その値はπである。また、n 径間連続桁の第n+1次の固有値は単純支持桁の第2次固有値に、第 2n+1次の固有値は単純支持桁の第3次固有値に全く一致している。さらに、6径間連続桁の固有値は単純支持桁、2径間および3径間連続桁の固有値をすべて含んでおり、その規則性の存在は興味深い。

図一 / は集中質量法(実線)および整合質量法(破線)による3径間連続桁の固有値λを、連続質量法(一点鎖線)により求めた固有値λ*で割った値を示している。N は質点系に換算したときの要素分割数である。要素分割数N を増加するにつれて、固有値λは厳密解λ*にだんだん近づいて行くことがわかる。また、集中質量法は厳密解に対して下界値を、整合質量法は上界値を与える。一般的に、同じ要素分割数では整合質量法による解析結果は集中質量法のものに比較して精度がよい。この原因は、固有剛性マトリックスの要素を、例えば k₁₁ を Taylor展開すると

$$k_{11} = 12EI/L^3 - 13Lw/(35g) \cdot \omega^2 - 59L^5w^2/(161,700g^2EI) \cdot \omega^4 - \dots \quad (9)$$

となり、式(9)の右辺第 / 項は従来の静的な桁の剛性マトリックスに、第2項は整合質量法の質量マトリックスの要素 m₁₁に一致している。つまり、整合質量法は固有円振動数のω⁴以上の高次の項を無視した連続質量法の特別な場合と考えることができる。さらに、集中質量法は質量マトリックスの非対角要素を零とし、整合質量法の簡易化をはかったものと考えられる。

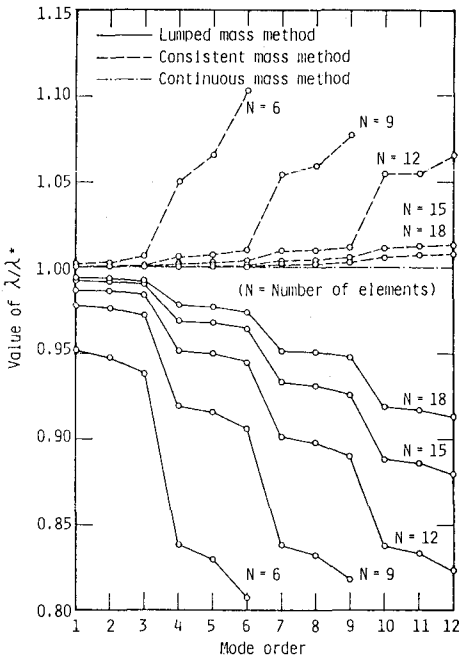
(参考文献) 1) Hayashikawa, T. and Watanabe, N., Proc. of ASCE, No. EM1, 1981, pp. 229-246.
2) Wendroff, B., Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.

Mode order	Number of spans of continuous beams											
	$\pi = 1$	$\pi = 2$	$\pi = 3$	$\pi = 4$	$\pi = 5$	$\pi = 6$						
1	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)						
2	2π (2.000)	3.926602 (1.250)	3.556408 (1.132)	3.393231 (1.080)	3.309052 (1.053)	3.260535 (1.038)						
3	3π (3.000)	2π (2.000)	4.297530 (1.368)	3.926602 (1.250)	3.700360 (1.178)	3.556408 (1.132)						
4	4π (4.000)	7.068582 (2.250)	2π (2.000)	4.463324 (1.421)	4.152944 (1.322)	3.926602 (1.250)						
5	5π (5.000)	3π (3.000)	6.707596 (2.135)	2π (2.000)	4.550434 (1.448)	4.297530 (1.368)						
6	6π (6.000)	10.210176 (3.250)	7.429541 (2.365)	6.545414 (2.083)	2π (2.000)	4.601418 (1.465)						
7	7π (7.000)	4π (4.000)	3π (3.000)	7.068582 (2.250)	6.459950 (2.056)	2π (2.000)						
8	8π (8.000)	13.351769 (4.250)	9.848793 (3.135)	7.591619 (2.416)	6.848552 (2.180)	6.409847 (2.040)						
9	9π (9.000)	5π (5.000)	10.571561 (3.365)	3π (3.000)	7.288610 (2.320)	6.707596 (2.135)						
10	10π (10.000)	16.493361 (5.250)	4π (4.000)	9.686559 (3.083)	7.676964 (2.444)	7.068582 (2.250)						
11	11π (11.000)	6π (6.000)	12.990402 (4.135)	10.210176 (3.250)	3π (3.000)	7.429541 (2.365)						
12	12π (12.000)	19.634954 (6.250)	13.713135 (4.365)	10.733799 (3.417)	9.601142 (3.056)	7.726964 (2.460)						
13	13π (13.000)	7π (7.000)	5π (5.000)	4π (4.000)	9.989880 (3.180)	3π (3.000)						
14	14π (14.000)	22.776547 (7.250)	16.131994 (5.135)	12.828171 (4.083)	10.430473 (3.320)	9.551104 (3.040)						
15	15π (15.000)	8π (8.000)	16.854729 (5.365)	13.351769 (4.250)	10.819221 (3.444)	9.848793 (3.135)						
16	16π (16.000)	25.918139 (8.250)	6π (6.000)	13.875367 (4.417)	4π (4.000)	10.210176 (3.250)						
17	17π (17.000)	9π (9.000)	19.273587 (6.135)	5π (5.000)	12.742753 (4.056)	10.571561 (3.365)						
18	18π (18.000)	29.059732 (9.250)	19.996321 (6.365)	15.969763 (5.083)	13.131484 (4.180)	10.869263 (3.460)						
19	19π (19.000)	10π (10.000)	7π (7.000)	16.493361 (5.250)	13.572054 (4.320)	4π (4.000)						
20	20π (20.000)	32.201325 (10.250)	22.415180 (7.135)	17.016960 (5.417)	13.960785 (4.444)	12.692711 (4.040)						

Note: The quantities within parentheses are values of β_m/π .

Note: The quantities within parentheses are values of λ_m/π.

表一 / 等断面等支間長の連続桁の固有値



図一 / 固有値とモード次数の関係