I-243　任意の相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばりの解析

長崎大学工学部　正員　○岡林 隆敏
長崎大学大学院　学生員　吉田 啓三

1. はじめに　構造物の信頼性解析を行うためには、不確定な荷重による確率的な応答解析が基礎になる[1]。不規則な分布荷重が作用する静的な解析では、確率微分方程式が境界値問題であるために、これまで効果的な手法が確立していないと考えられる。著者らは、伝達マトリックス法を共分散方程式に拡張して、各種のはりに任意の相関を有する分布荷重が作用した場合の分散・共分散応答解析の手法をすでに報告した[2][3]。本報告では、この理論を多径間ばりに適用し、一般的な解法を提案する。次に数値計算例として、指数関数型と指数余弦関数型の自己相関関数を有する不規則分布荷重を受ける2径間連続ばりの変動解析を行なった。

2. はり－荷重系の状態空間表示

図-1のように、分布荷重が作用する連続ばりにおいて節点1での支点反力R_1を状態変数として取り込むことにより、x点のたわみ$w(x)$, たわみ角$\phi(x)$, 曲げモーメント$M(x)$ 及びせん断力$Q(x)$ は次のような状態変数

$$\mathbb{Y}(x) = [w(x)\ \ \phi(x)\ \ M(x)\ \ Q(x)\ \ R_1]^T \tag{1}$$

を用いて、状態空間で次のように表すことができる。

$$\left.\begin{array}{l} d\mathbb{Y}(x)/dx = \mathbb{A}_Y(x)\mathbb{Y}(x) + \mathbb{F}_Y(x) \quad (0 \le x \le \ell) \\ \text{境界条件}:\ \mathbb{Y}(0)=\mathbb{Y}_0,\ \mathbb{Y}(\ell)=\mathbb{Y}_\ell \end{array}\right\} \tag{2}$$

荷重系モデルの構成　不規則分布荷重$q(x)$を、正規性定常確率過程$r(x)$とその分散の空間的変化を示す確定関数$g(x)$の積で表される非定常確率過程でモデル化する。

$$q(x) = r(x)\cdot g(x) \tag{3}$$

パワースペクトル密度$S_r(\omega)$または自己相関関数$R_r(\lambda)$が得られた場合、その定常確率過程は、状態ベクトル

$$\mathbb{Z}(x) = [Z_1(x)\ \cdots\cdots\ Z_n(x)]^T \tag{4}$$

で表される荷重系

$$\left.\begin{array}{l} d\mathbb{Z}(x)/dx = \mathbb{A}_Z\mathbb{Z}(x) + \mathbb{B}_Z W(x),\ r(x) = \mathbb{C}\mathbb{Z}(x) \\ \text{境界条件}:\ \mathbb{Z}(0)=\mathbb{Z}_0,\ \mathbb{Z}(\ell)=\mathbb{Z}_\ell \end{array}\right\} \tag{5}$$

の定常解過程で表すことができる[3]。ここに、$W(x)$は白色雑音過程である。

はり－荷重系の方程式　はり－荷重系の状態変数を

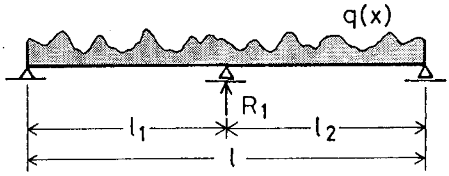
$$\mathbb{X}(x) = [\mathbb{Y}(x)\ \ \mathbb{Z}(x)]^T \tag{6}$$

で表すと、はり－荷重系の方程式は

$$\left.\begin{array}{l} d\mathbb{X}(x)/dx = \mathbb{A}_X(x)\mathbb{X}(x) + \mathbb{F}_X(x) \\ \text{境界条件}:\ \mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0,\ \mathbb{X}(\ell)=\mathbb{X}_\ell \end{array}\right\} \tag{7}$$

で表すことができる。$\mathbb{F}_X(x)$は正規性白色雑音ベクトルとなり、その共分散は次式で与えられる。

$$E[\mathbb{F}_X(x_1)\mathbb{F}_X(x_2)^T] = \mathbb{Q}_X(x_1)\delta(x_1 - x_2) \tag{8}$$



図－1　不規則分布荷重が載荷する連続ばり

3. 境界マトリックスと節点マトリックス

はりの左端は、回転支点なので$[\phi_0\ Q_0]^T$の自由度がある。その点で、支点反力R_1を考慮した初期ベクトル$\tilde{\mathbb{Y}}_0$は$[\phi_0\ Q_0\ R_1]^T$で表される。これを用いると左端境界条件は次式となる。

$$\mathbb{Y}_0 = \mathbb{B}_Y\cdot\tilde{\mathbb{Y}}_0 \tag{9}$$

[3]

はり－荷重系に対して、次のような左端境界条件と左端境界マトリックスを定義する。

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{X}_0 = \mathbb{B}_X\cdot\tilde{\mathbb{X}}_0,\ \mathbb{X}_0 = [\mathbb{Y}_0\ \mathbb{Z}_0]^T,\ \tilde{\mathbb{X}}_0 = [\tilde{\mathbb{Y}}_0\ \mathbb{Z}_0]^T \\ \mathbb{B}_X = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_Y & \mathbb{O}_{5n} \\ \mathbb{O}_{n3} & \mathbb{I}_{nn} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{10}$$

右端も同様に、終端ベクトル$\tilde{\mathbb{Y}}_\ell$は、$[w_\ell\ M_\ell\ R_1]^T$で表される。これを用いると右端境界条件は次式となる。

$$\mathbb{B}'_Y\mathbb{Y}_\ell = \tilde{\mathbb{Y}}_\ell = \mathbb{O} \tag{11}$$

[3]

はり－荷重系に関しては

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{B}'_X\mathbb{X}_\ell = \tilde{\mathbb{X}}_\ell,\ \mathbb{X}_\ell = [\mathbb{Y}_\ell\ \mathbb{Z}_\ell]^T,\ \tilde{\mathbb{X}}_\ell = [\mathbb{O}_{3n}\ \mathbb{Z}_\ell]^T \\ \mathbb{B}'_X = \begin{bmatrix} \mathbb{B}'_Y & \mathbb{O}_{3n} \\ \mathbb{O}_{n5} & \mathbb{I}_{nn} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{12}$$

次に節点マトリックスについて考える。

$$\mathbb{Y}^L_{\ell_2} = \mathbb{P}_{Y1}\mathbb{Y}^R_{\ell_1},\quad \mathbb{P}_{Y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここに、$\mathbb{P}_{Y1}$は節点マトリックスである。はり－荷重

系の節点マトリックス $\mathbb{P}_{x1}$ は、次式で与えられる。

$$\mathbb{P}_{x1}=\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{Y1} & \mathbb{O}_{5n}\\ \mathbb{O}_{n5} & \mathbb{I}_{nn}\end{bmatrix} \tag{14}$$

4. 不規則応答解析

はり－荷重系 $X(x)$ の共分散 $\mathbb{R}_X(x)$ は次のように分割される。

$$\mathbb{R}_X(x)=\begin{bmatrix}\mathbb{R}_Y(x) & \mathbb{R}_{YZ}(x)\\ \mathbb{R}_{ZY}(x) & \mathbb{R}_Z(x)\end{bmatrix} \tag{15}$$

はりの共分散応答 $\mathbb{R}_Y(x)$ は、はり－荷重系の共分散応答 $\mathbb{R}_X(x)$ の要素として得られる。はり－荷重系の方程式(7)式の解過程は線形微分方程式の理論より次式で与えられる。

$$X(x)=\Phi_X(x,0)+\int_0^x\Phi_X(x,\lambda)F_X(\lambda)d\lambda \quad (0\le x\le \ell_1) \tag{16}$$

$$X(x)=\Phi_X(x,\ell_1)\mathbb{P}_{x1}\Phi_X(\ell_1,0)X_0+\Phi_X(x,\ell_1)\mathbb{P}_{x1}\int_0^{\ell_1}\Phi_X(\ell_1,\lambda)F_X(\lambda)d\lambda+\int_{\ell_1}^{\ell}\Phi_X(x,\lambda)F_X(\lambda)d\lambda \quad (\ell_1\le x\le \ell) \tag{17}$$

はり－荷重系の共分散方程式

$$\frac{d}{dx}\mathbb{R}_X(x)=A_X(x)\mathbb{R}_X(x)+\mathbb{R}_X(x)A_X(x)^T+\Phi_X(x,0)E[X_0F_X(x)^T]+E[F_X(x)X_0^T]\Phi_X(x,0)^T+Q_X(x) \quad (0\le x\le \ell_1)$$

初期条件： $\mathbb{R}_X(0)=\mathbb{R}_{X0}$ (18)

$$\frac{d}{dx}\mathbb{R}_X(x)=A_X(x)\mathbb{R}_X(x)+\mathbb{R}_X(x)A_X^T(x)+\Phi_X(x,\ell_1)\mathbb{P}_{x1}\cdot\Phi_X(\ell_1,0)E[X_0F_X(x)^T]+E[F_X(x)X_0^T]\Phi_X(\ell_1,0)^T\mathbb{P}_{x1}^T\Phi_X(x,\ell_1)^T+Q_X(x) \quad (\ell_1\le x\le \ell)$$

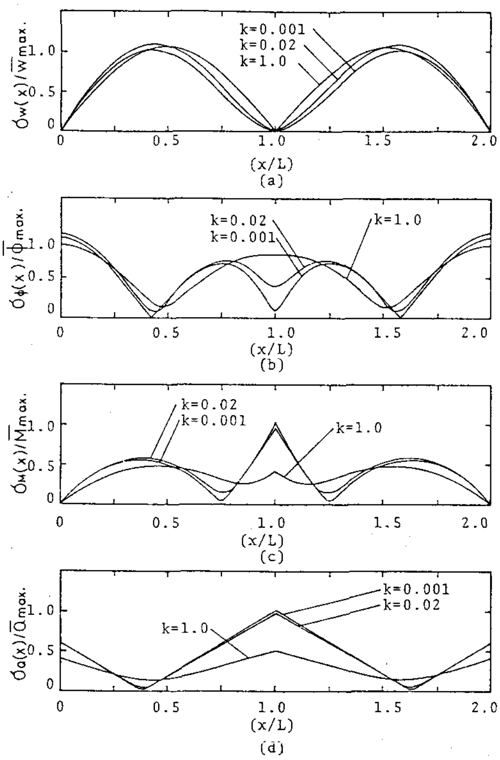
初期条件： $\mathbb{R}^L_{X\ell_2}=\mathbb{P}_{x1}\mathbb{R}^R_{X\ell_1}\mathbb{P}_{x1}^T$ (19)

この微分方程式を解くことにより、各分散応答が得られる。この微分方程式を解くためには、a)初期条件と外力の相関関数，b)初期条件の共分散を求める必要があるが、これらの処理はほぼはりの場合[3]のアルゴリズムで実施できる。

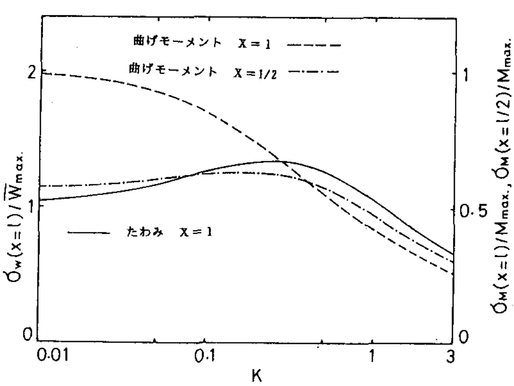
5. 数値解析と考察

荷重モデルとして、指数関数型と指数余弦関数型の相関関数を有する確率過程を考えた。ここでは、指数関数型の計算結果を示している。計算の対象とした連続ばりは、$\ell_1=\ell_2=\ell/2$ の場合である。図-2は、それぞれの応答の標準偏差を示したものである。ここにkは、$k=\Omega\ell$ の無次元パラメータであり，分布荷重の強度は、$\sigma^2\ell_1/g=1$（g は等分布荷重の荷重強度）で規定した。$k\to 0$ では、等分布荷重の強度が不規則に変化する応答に漸近し，$k\to\infty$ では白色雑音過程による応答に漸近する。しかし、ここでの荷重モデルとして、kの値にかかわりなく荷重のパワーを一定にしているので、$k\to\infty$ の場合の応答レベルは低下する。図-3は、kの変化に対するたわみと曲げモーメントの最大応答を示したものである。kの増加に伴って、曲げモーメントが最大を示す位置が、$\ell/2$ 点から $\ell/4$ 点に遷移する。また、連続ばりの場合は、分布荷重の波数に鋭敏に反応する性質があることが明らかになった。

自己相関関数 ： $R_r(\lambda)=\sigma^2e^{-\Omega\lvert\lambda\rvert}$
パワースペクトル ： $S_r(\omega)=2\Omega\sigma^2/(\omega^2+\Omega^2)$
荷重系の方程式
$dZ(x)/dx=-\Omega Z(x)+\sigma w(x)$
$r(x)=\sqrt{2\Omega}\cdot Z(x)$
$w(x)$：単位の強度を有する白色雑音過程



図－2　応答の標準偏差



図－3　K による最大応答の変化

［参考文献］(1)高岡,他，土木学会論文報告集第334号,1983年6月, (2)岡林，土木学会論文報告集,第316号,1981年12月 (3)岡林,他 土木学会論文報告集,第341号，1984年1月