I-225　標準化変数で表現された種々な確率分布

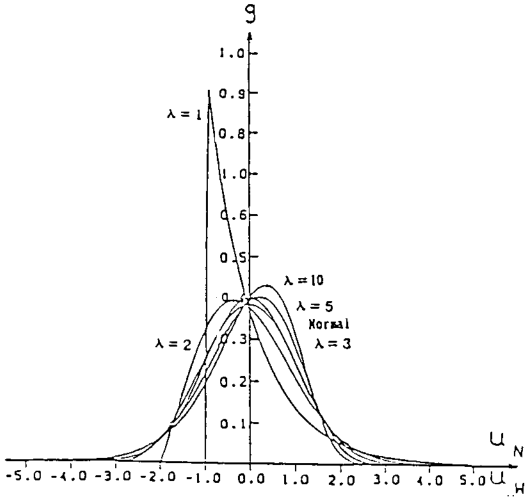
信州大学工学部　正員　小山　健
信州大学工学部　正員　長　尚

1．まえがき

種々な確率分布を，同一な物差しである標準化変数で表現し，一般的に図表等で視覚的にも数値的にも，比較できることは，これらの確率分布を利用する者にとって，少なからず意義がある。特に特定の確率分布が正規分布とどのように相違しているか（どのような条件の場合正規分布に近付くか，あるいは遠のくか）を知ることは極めて重要である。通常の教科書・参考書等では，t分布についてはこのような比較図が掲載されているが，その他の分布については見当たらない。ただしグンベル分布とか対数正規分布等については，これらの分布のパラメータ（平均値，メジアン，標準偏差等）を特定の値に固定した上での比較図が示されている。そこで本文では主として信頼性理論において良く用いられる幾つかの確率分布（ワイブル分布，ベータ分布，グンベル分布，対数正規分布）について標準化変数で表現し，若干の考察を加える。

2．標準化変数による表現

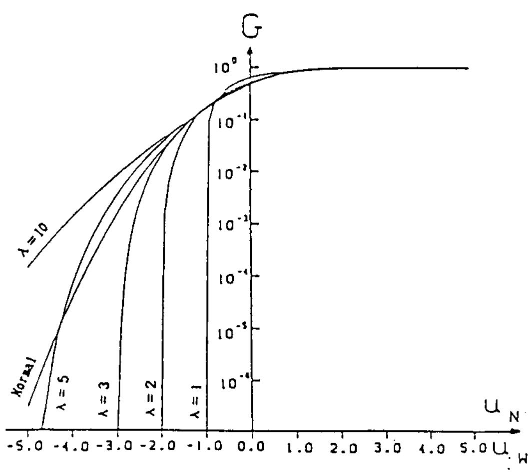
ある確率分布を定義するために平均値，分散以外の例えば上下限値のようなパラメータを必要とする場合には，正規分布のように標準化変数によってその確率分布を一意に表現することはできない。そのような場合には標準化変数による表現に都合の良いインデックスを選び，それをパラメータとしてその確率分布を表現する必要がある。ここではそれらのインデックスとして，確率変数の下限値を標準偏差単位で測った平均値からの距離を意味するλと，上限値をλの単位で測った平均値からの距離を意味するμを用いた。あるi確率分布の標準化変数 u_i によって表現された確率密度関数 g_i 及び累積分布関数 G_i のうち，スペースの都合でワイブル分布について図ー1，2に示す。



図ー1　ワイブル分布の確率密度関数

2．各確率分布の特徴

幾つかの図及び関数値の表から各確率分布の特徴が次のように読みとれた。1）ワイブル分布：λ＝1では極端に偏った確率密度曲線になるが，λ＞2ではかなりなめらかな曲線となる。λ≒5で，$-4.5 < u_W < 0$ ではほぼ正規分布と同じような模様を示す。λ＞6では同じ確率pに対して $u_W < u_N$ となり，λ＜4で且つ $u_W < 1.5$ では同じ確率pに対して $u_W > u_N$ となる。又λ＜3では確率密度曲線は左傾的となり，λ＞3では右傾的となる。2）ベータ分布：ワイブル分布と同様，λ＝1では極端に偏った確率密度曲線になるが，λ＞2ではかなりなめらかな曲線となる。μ＝1のときλが大きい程正規分布に近付く傾向がある。3）グンベル分布：超過及び非超過確率の小さい所で，正規分布との違いが非常に

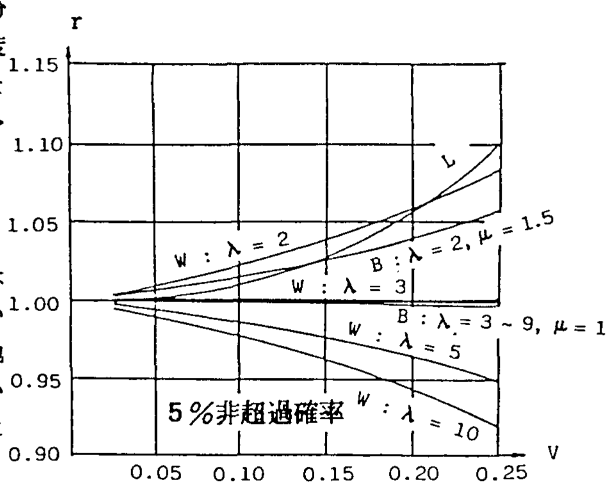


図ー2　ワイブル分布の累積分布関数

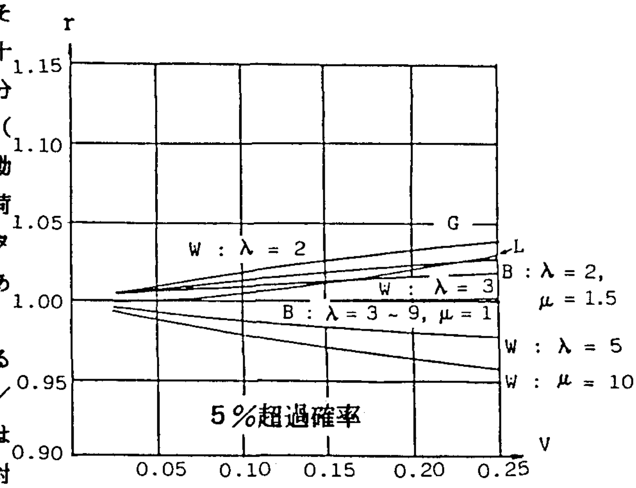
大きくなる様子が良くわかる。4）対数正規分布：変動係数が大きくなるにつれて，確率密度曲線は次第に正規分布曲線から離れて左傾的となり，超過及び非超過確率の小さい所で $u_L > u_N$ となり，正規分布との違いが顕著となる。

4．限界状態設計法における特性値

限界状態設計法の特性値と確率分布の関連は興味ある問題の一つである。通常用いられている，確率分布を正規分布とみなした定義式が他の確率分布の場合どの程度有効であるかについて，本文で示した標準化変数を利用することにより，かなり一般的に議論することができる。普通の場合，強度の特性値を5％非超過確率で，荷重のそれを5％超過確率で定義される。そのとき強度もしくは荷重の統計的データが不十分なので，取敢えずこれらの確率分布を正規分布と見なして次式が用いられる。 $x_k = \overline{x}(1 \mp 1.645\ V)$ ・・・（1） ここにVは変動係数である。ここではこれらの強度もしくは荷重が正規分布ではなく，ワイブル分布，ベータ分布，グンベル分布或いは対数正規分布等であったとしたとき，この式（1）を用いた場合，どの程度の誤差があるかは次の式で定義される r の値から判断できる。 $r = (1 + u_{ik}) / (1 \mp 1.645\ V)$ ・・・（2） ここに u_{ik} は i 確率分布の5％非超過もしくは超過確率に対する標準正規化変数である。この式（2）の分母は正規分布のときの特性値の平均値に対する水準を，分子は i 確率分布のときのそれを意味する。したがって r の値が1に近い程誤差が少ないことを示す。この r の計算結果を図－3，4に示す。これらの図から次のことが言える。1）ワイブル分布でλ＝3及びベータ分布でλ≧3のときは，r ≒ 1 となり，式（1）を用いても誤差はほとんどない。2）グンベル分布（最大値分布の場合は荷重に関連するから特性値は超過確率で，最小値分布の場合は強度に関連するから特性値は非超過確率で定義される）でも変動係数が25％以下であれば，1≦r≦1．04である。3）対数正規分布及びλ＝2のワイブル分布，ベータ分布では，変動係数が25％以下であれば，1≦r　≦1．1である。4）強度及び荷重等の確率変数に関する，確率分布形，平均値，変動係数等の統計情報の不足を考慮すると，特殊な場合（λ≦2又はλ≧5のワイブル分布及びλ≦2のベータ分布とか，対数正規分布で変動係数が極端に大きいと考えられるような場合）以外は式（1）で特性値を定義しても十分意味があるといえる。以上のように，かなり性格の異なる広範な種類の確率分布を考えても，特殊な場合を除き式（1）で特性値を定義して良いという結果になったのは次のような理由による。すなわち，破壊確率のように確率の非常に小さいレベルの議論をするときには，確率分布の違いは敏感にその結果に響くが，特性値のように確率のレベルが高い（5％のような）ときには確率分布の違いは鈍感にしかその結果に響かないからである。



図－3　特性値の比較



図－4　特性値の比較