I-224　ベイズの定理の適用について

信州大学工学部　正員　長　尚

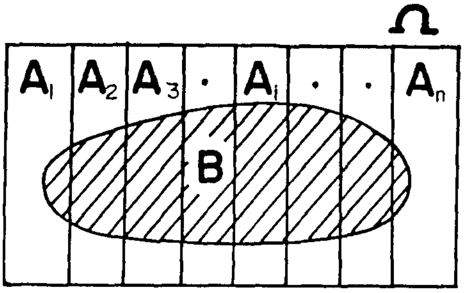
1．まえがき

工学問題にベイズの定理を適用する最大のメリットは一般に次のように言われている。[1),2),3)] "主観的判断又は不確実な情報に基づいて推定した事前確率を，観測もしくは実験等によって得られた情報を利用して，より確かな事後確率に更新するのに役立つ。更に観測もしくは実験等によって得られる情報が限られているような状況（工学問題ではしばしば遭遇する）では，主観的判断を加味して，情報不足を補うことができる。" いずれにしても，不確かな事前確率が，比較的限られた情報を用いることによって，より確かな事後確率に更新され，その更新の度合がある程度顕著であることが，ベイズの定理の適用には期待されていると言える。土木工学の分野においても，"実験もしくは観測データが限られている状況の下で，それまでの判断をかなり改善できる" として，ベイズの定理がしばしば用いられている。ところで普通ベイズの定理を批判する立場の人が指摘するのは次の2点であると言われている。[4)] 1）事前確率（主観確率）なるものが果して存在するか，不明な場合が多い。2）事前確率が存在すると認められる場合でも，その値を知ることは一般に困難である。本文は，このような批判とは別に，1）通常の教科書，参考書にベイズの定理を適用するに際しての前提について断りがないため，必ずしも適切とは思われない適用が散見されるので，その前提を明確に示すこと，2）土木工学上の問題にベイズの定理を適用しても通常期待されている程の効用はないと指摘することを目的とする。

2．ベイズの定理とその前提条件

ベイズの定理は，【排反かつすべての場合をつくす事象$A_1, A_2, \cdot\cdot, A_i, \cdot\cdot, A_n$からなる確率空間Ωにおいて，これらの事象とは異なるある事象Bが生起したということが条件となった，あくまで条件付確率P（A_i｜B）の定義そのもの】である（図－1参照）。

このベイズの定理には，行動の決定或いは推論のプロセスに適用しようとする，所謂Bayesianの立場がある。そしてこの場合の確率は，命題（仮説）の確率すなわち確信の度合(degrees of belief，主観確率）で，基本的に通常の頻度確率（客観確率）とは異なるものである。[5),6)] 普通条件付確率P（A_i｜B）の意味は，"条件Bの下でのA_iの生起する確率，すなわちBなる事象の中でA_iの事象に属している確率" である。ここでBなる事象である現象が観測されたとすると条件付確率P（A_i｜B）の意味は，"Bなる事象であるその現象（サンプリング）がA_iの事象に属している確率" である。さらにA_iが排反な命題（仮説）だとすると，命題は結局一つに絞られるべきであるから，n個の排反事象の中，常にどれか一つの事象に属して，Bなる事象は生起しているという前提があることになる。この場合には，Bなる事象である現象が観測されたとすると条件付確率P（A_i｜B）の意味は，"命題がA_iである可能性についての，事後の確信の度合" ということになる。したがってある事象の生起したことが条件となって，ある排反事象の事前確率を事後確率に修正できるためには，次のような前提を必要とする。すなわち "いずれの排反事象（命題，仮説）かは判らないが，常にその中の一つの事象に属して，ある事象は生起している" というのがそれである。つまりどの排反事象（命題，仮説）に絞れるかその可能性の度合について，ある事象の生起したことによって修正した結果が事後確率である。したがって，ある事象の生起に関するデータが多くなると，次第に特定の事象（命題，仮説）の確率（確信の度合）が1に近付くという性質を持っている。なお当然であるが，複



図－1　確率空間

数個の排反事象に属して，ある事象が生起する（同時にではない）可能性のある場合には，ある事象が生起してもそれはある排反事象の事前確率を事後確率に修正する条件とはなり得ない。その場合の確率の意味は単に“その一つの生起した事象がある排反事象に属する確率”ということになる。

３．検討を加えた適用例等

検討を加えたベイズの定理の適用例等は次の通りである。(1)亀田弘行・池淵周一・春名功著［確率・統計解析］[2]の例題２．５にある杭の支持力の問題への適用例：ある建設工事で設置される多数の杭基礎が，それぞれ150t以上の支持力を有するかどうかの推定を載荷試験によって更新する。(2)A.H-S.Ang & W.H.Tang著［Probability Concepts in Engineering Planning and Design,Volume I］[7]の EXAMPLE 8.1, 8.3 にある杭の支持力の問題への適用例：これらも前例と同じように載荷試験によって破壊確率の推定値を更新するのであるが，破壊確率の値が仮説で，それがどの値をとるかについての，推定の自信の程度が確信の度合であり，破壊確率の推定値は通常の頻度確率である。すなわち，確信の度合の改善にベイズの定理が適用され，それを利用して頻度確率の推定の改善がなされており，頻度確率に直接ベイズの定理は適用されてはいない。(3)松原望著［意思決定の基礎］[8]にあるつぼのモデルへの適用例：通常ポリヤのつぼの問題と言われ，それぞれ２種の色の玉がある割合で入っている複数のつぼの一つから玉を取り出し，その玉の色を知ってそれがどのつぼからであるかを推定する。(4)確率分布のパラメータ推定への適用。

４．結論

前項に挙げた適用例等について種々検討した結果次のような結論を得た。１）ベイズの定理を適用するに当っては，“いずれの排反事象（命題，仮説）かは判らないが，常にその中の一つの事象に属してある事象は生起している”という前提が必要であるいうことをはっきり理解していなければならない。そうでないと間違った適用をし，結果の解釈を誤り，さらには余り意味のない適用をしたりすることになるので，注意しなければならない。２）事前の判断が非常に曖昧な時にベイズの定理を適用すると有効であるが，通常我々が遭遇する頻度確率の問題の場合には，比較的キメの細かく，精度の良い結果を必要とするので，効果的なベイズの定理の適用は望めない。したがって判断の選択肢が幾つかありその決定に苦しむようなときに適用すれば効果がある（ベイズ決定理論のように）が，通常の土木工学上の頻度確率の問題にはベイズの定理の適用の効果，“少ない情報から実りの多い結果を引き出すこと”は余り期待できない。３）サンプリング理論におけるパラメータの推定へのベイズの定理の適用は事前情報が不確実で新しい情報との間でパラメータの値にかなり差があり，情報量にはあまり差がない場合にのみそのメリットが発揮される。ただし事後の推定値の方が必ずしも良いとは限らないこと，及び精度は一般に良くないことを認識しておかなければならない。したがって事後の推定値を利用してある結果が得られた場合には，ある種の判断もしくは行動の決定のための一資料としてその結果は用いられるべきもので，古典的推定によった結果とは根本的に意味が異なることに留意すべきである。４）上記２），３）のことは“仮説の確信の度合”に関するベイズの定理は本来，“行動の決定或いは推論のプロセスに適用されるものである”ことからの当然の帰結である。つまり確信の度合は主観確率であり，主観的判断，すなわち大まかな判断の修正という局面においてしか有効ではないのである。５）頻度確率に限らず，主観確率の場合にも，ベイズの定理の適用のメリットが発揮されないことがあり得る。

参考文献　１）伊藤学・尾坂芳夫：設計論技報堂，pp.221, 1980. ２）亀田弘行・池淵周一・春名攻：確率・統計解析，技報堂，pp.20 ～21, 1981. ３）松本嘉司・伯野元彦：土木解析法２，技報堂，pp. 311 ～313 , 1975. ４）北川敏男：推測統計学II，岩波書店,pp.171,1956. ５）D.V.リンドレー（竹内啓・新家健精訳）：確率統計入門１確率，培風館，pp.28 ～41, 1968. ６）林周二：統計学講義，丸善，pp.80 ～83, 1973. ７）A.H-S.Ang & W.Tang：Probability Concepts in Engineering Planning and Design,Volume I ― Basic Principles,John Wiley & Sons,Inc., pp.332～350 , 1975. ８）松原望：意志決定の基礎，朝倉書店，pp.16 ～20, 1977.