

京都大学工学部 正員 小林 昭一

京都大学工学部 正員 田村 武

京都大学大学院〇学生員 仲山 公規

1. はじめに

最適形状に関する問題は、最適設計において重要であり、かつ基礎的な問題である。本研究では、弾性棒のねじりを取りあげ、棒の断面積が一定であるという条件を与えた時、どのような断面形状でねじり剛性が最大になるかという事を考える。ここでは、ねじり剛性を求めるのに有限要素法、また最適化の部分には、Newton-Raphson法を用いて計算した。

2. 解析手法

純ねじりの状態において、基礎方程式は、次のPoisson方程式である。

$$\Delta \Psi = -2 \quad \Psi: \text{ねじり応力関数 (Prandtl関数)}$$

(i) 単連結領域の場合

境界条件は、 $\Psi = 0$ on C_0 であり、この時、

ねじり剛性は、次式で与えられる。

$$D = \mu \int 2\Psi dS \quad \mu: \text{せん断弾性係数}$$

(ii) 複連結領域の場合

この場合、境界条件は、 $\begin{cases} \Psi = 0 & \text{on } C_0 \\ \Psi = c_i & \text{on } C_i \ (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$ であり

C_i を求めるために、基礎方程式 次式を連立させなければならない。

$$-\int_{C_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = 2\Omega_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ここに Ω_i は 閉曲線 C_i で囲まれる面積を表す。この時、ねじり剛性は次式で与えられる。

$$D = \mu \int 2\Psi dS + 2\mu \sum_{i=1}^n C_i \Omega_i$$

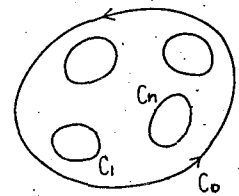


Fig.1

ここで、弾性棒の断面上に原点をとり、そこから周辺曲線または孔縁曲線までの距離を x_i とすると、目的関数、制約条件 (断面積一定) は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{object function} \quad & D(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \\ \text{subject to} \quad & g(x_1, x_2, \dots, x_n) = S \\ & a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

よって Lagrange 関数は、 $L(x, \lambda) = D(x) - \lambda(g(x) - S)$ となり、Newton-Raphson 法を用いると、解くべき連立方程式は次のようになる。

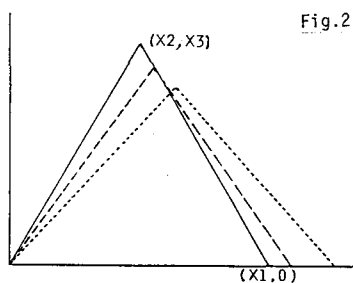
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial D}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial D}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} & -\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial D}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial D}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial D}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial D}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial D}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial D}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} & -\frac{\partial g}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g}{\partial x_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial D}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial D}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots \\ -\frac{\partial D}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ g - S \end{pmatrix} \quad \dots (1)$$

そして、制約条件の第2式に関しては、上式の解が $\Delta X_i \geq 0$ であれば、 $d = \min(1, \frac{b_i - X_i}{\Delta X_i})$ として次のステップの値を $X_i = X_i + d\Delta X_i$ で計算する。 $\Delta X_i < 0$ であれば、 $d = \min(1, \frac{a_i - X_i}{-\Delta X_i})$ とする。また、 $X_i = a_i$ の場合に、 $\Delta X_i < 0$ となり制約条件 $a_i \leq X_i \leq b_i$ を乱す方向に進もうとする場合には、(1)式の左辺の行列の i 行と i 列を除いて連立方程式を作り、これを解いて新しい方向ベクトル $(\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_{i-1}, 0, \Delta X_{i+1}, \dots, \Delta X_n, \Delta \lambda)$ を作り、前述の作業を行なう、次のステップへ進む。 $X_i = b_i$ の時も同様である。今回収束判定は、各ステップにおける方向ベクトルの絶対値の和が、0.002よりも小さくなれば、収束したと判定している。また、ねじり剛性 $D(X)$ は、直接微分することが、できないので差分を用いている。

3. 計算例

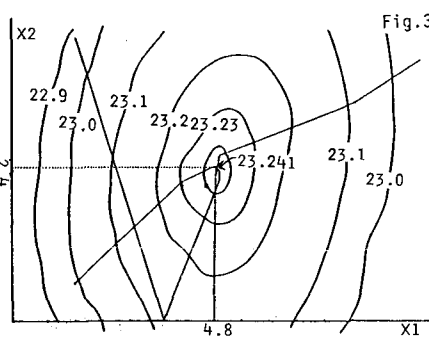
(1) 3変数の場合

Fig.2のように変数 $X_1 \sim X_3$ をとり、計算を行なうと正三角形に収束する。Fig.3は、断面積を一定にして三角形の形状を変化させ、その時のねじり剛性の変化を調べグラフ化したもので、直線は、3種類の初期値に対する収束の径路を示したものであるが、これからも正三角形でねじり剛性が最大になることが分かる。



(2) 4変数の場合

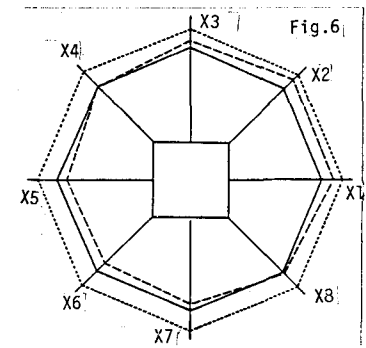
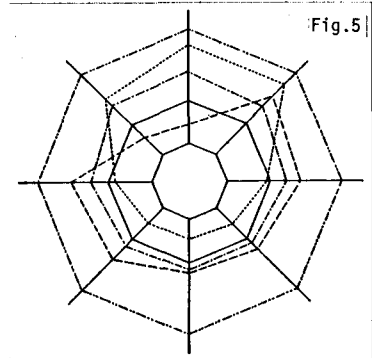
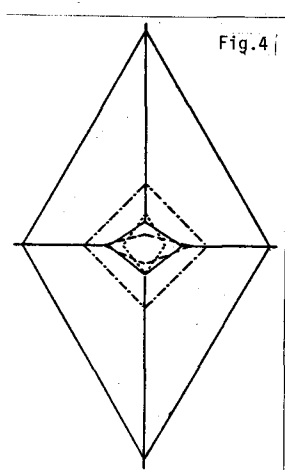
単連結領域の場合、正方形に収束する。これは解析解からも明らかである。また複連結領域の場合、周辺曲線を正方形に固定すると、孔縁曲線は正方形に収束する。また周辺曲線をFig.4のようにひし形に固定すると、横に長いひし形に収束する。



(3) 8変数の場合

Fig.5のように孔縁曲線を正八角形に固定すると、周辺曲線も正八角形に収束する。また、Fig.6のように、孔縁曲線を1辺の長さが2の正方形に固定すると、 $X_1 = X_3 = X_6 = X_7 = 3.49$, $X_2 = X_4 = X_5 = X_8 = 3.45$ に収束する。

よって本研究の手法は、有効であると思われるが、断面が扁平になると有限要素法において誤差が注ぎやすい事に注意しなければならない。現在その問題を解決するために、境界積分方程式による定式化を進めている。



参考文献

1. 阿部博之 関根英樹 「弾性学」 コロナ社
2. 「Newton法の新しい登場」 数理科学 8.1981