

使用時および終局時制約を同時に考慮した最適設計 における終局時制約の有効範囲について

防衛大学校土木工学教室 正員 石川信隆

正員 三原徹治

学生員 香月 智

1. 緒言 近年、耐震設計の観点から、通常の使用荷重レベルにおける応力および変形制約と、終局荷重レベル以前で塑性崩壊しないような終局時制約の2つを同時に考慮した最適設計法の開発が必要となってきた。しかし、静的荷重を対象とした研究としては、わずかにGrierson¹⁾および著者²⁾の研究があるにすぎず、しかもこれらの研究ではいずれも2つの制約が同時にアクティブとなるときの終局時制約の有効範囲については言及していなかった。本報告は上記の不備を補うため、使用時および終局時制約を同時に考慮した最適設計法における終局荷重制約の有効範囲について考察するものである。

2. 終局荷重制約の有効範囲 使用時および終局時の制約を同時に考慮した最適設計は、一般に次式のように表わされる。^{1), 2)}

$$\begin{array}{ll} V = \rho \mathbb{L} X \rightarrow \min. & (1a) \\ \text{s.t. } \sigma_a^l \leq \sigma \leq \sigma_a^u & (S) \quad (1b) \\ u_a^l \leq u \leq u_a^u & (D) \quad (1c) \\ \alpha \leq \alpha & (U) \quad (1d) \\ X^l \leq X \leq X^u & (1e) \end{array}$$

ここに、式(1a)は、構造物の全重量が最小となることを、式(1b)、式(1c)は、それぞれ使用荷重レベルにおける弾性の応力および変位制約を示し、また式(1d)は終局荷重レベル(α)以前で塑性崩壊しないという終局時制約、さらに式(1e)は設計変数の要素寸法制限を表わしている。ただし、 α ＝崩壊荷重係数； α_0 ＝設計終局荷重係数； ρ ＝単位体積あたりの重量； $\mathbb{L}$ ＝部材長ベクトル； X ＝設計変数（トラスでは断面積）； σ ＝弾性応力； σ_a^u, σ_a^l ＝許容応力の上下限值； u ＝節点変位； u_a^u, u_a^l ＝許容変位の上下限值。式(1)は文献2)に示したようにSLPによって容易に解くことができる。

さて、上記の設計は終局荷重係数 α_0 の値によって終局荷重制約がアクティブでなくなる場合がある。したがって、使用時と終局時の制約が同時にアクティブとなる終局荷重係数の有効範囲($\alpha^l \leq \alpha \leq \alpha^u$)を決定する必要がある。ここに、 α^u, α^l は有効な終局荷重係数の上下限値である。

(1) α^u の決定法： α^u の値はS+U設計（使用時応力(S)と終局時(U)制約が同時にアクティブとなる）またはD+U設計（使用時変形(D)と終局時(U)制約が同時にアクティブとなる）とU設計（終局時(U)制約のみアクティブとなる）との境界値を意味する。この値は以下のようにU設計の結果とSまたはD制約を組み合わせることにより決定される。まずU設計が α_0 の値に比例することに着目すると、任意の α_0 に対する設計変数 X は次式のようになる。 $X = \alpha_0 \bar{X}$ (2)

ここに、 $\bar{X}$ は $\alpha_0 = 1$ としたときのU設計によって求めた設計変数。したがって任意の値 α_0 における弾性応力 σ と弾性変形 u は式(2)の設計変数を用いて次のように求められる。

$$\sigma = \frac{1}{\alpha_0} \bar{\sigma}, \quad u = \frac{1}{\alpha_0} \bar{u} \quad (3)$$

ここに、 $\bar{\sigma}$ および $\bar{u}$ は、設計変数 $\bar{X}$ による応力および変形を示す。式(3)を式(1b)または式(1c)に代入すれば、有効な終局荷重係数の上限値 α^u は次式によって決定される。

$$\alpha_0 = \max_i (\alpha_{0i}, \alpha_{0j}) \quad (4a)$$

$$\text{ただし } \alpha_{0i} = \begin{cases} \bar{\sigma}_i / \sigma_{ai}^u & (\bar{\sigma}_i \geq 0) \\ \bar{\sigma}_i / \sigma_{ai}^l & (\bar{\sigma}_i < 0) \end{cases} \quad (4b)$$

$$\alpha_{0j} = \begin{cases} \bar{u}_j / u_{aj}^u & (\bar{u}_j \geq 0) \\ \bar{u}_j / u_{aj}^l & (\bar{u}_j < 0) \end{cases} \quad (4c)$$

ただし、 $\bar{\sigma}_i, \bar{u}_j$ は設計変数 $\bar{X}$ による部材 i の応力と節点 j の変形。

(2) 下限値 α^L の決定法: 一方 α^L の値は, 弾性設計(S, D, S+D設計)と使用時と終局時の制約が同時にアリティとなる設計(S+U, D+U, S+D+U設計)との境界値を意味する。したがって, α^L の値は弾性設計場において設計終局荷重係数 α が崩壊荷重係数 α と一致するとき得られる。まず最適弾性設計によって各部材の塑性容量 R_e が次のように求められる。

$$R_e = X_e \sigma_y \quad (5)$$

ただし, X_e =最適弾性設計によって得られた設計変数, σ_y =降伏応力。よって, α^L の値は次のような崩壊荷重解析によって得られる α となる。

$$\alpha^L = \alpha = R_e \dot{\lambda} \rightarrow \min. \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } \dot{U} - N \dot{\lambda} = 0 \quad (6b)$$

$$F^T U = 1 \quad (6c)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (6d)$$

ただし, 式(6)は塑性解析の運動的アプローチに基づく崩壊荷重係数 α の決定法である。 $\dot{\lambda}$ =塑性乗数速度ベクトル; $\dot{U}$ =節点変位速度ベクトル; C =適合マトリクス; N =降伏曲線の単位外向き法線マトリクス。

3. 計算例 いま図-1に示す3部材トラスが使用荷重 P と終局荷重 αP に抵抗できるように設計する場合を考える。

(1) 図-2は許容変位 $u_a = \infty$ すなわち変位制約を無視したときの終局荷重係数 α と全体積 V または設計変数 X_i との関係を示したものである。この図より, SとU制約を同時に考慮した本法は, $\alpha_c = 1.83 \sim 2.08$ の範囲でSおよびU制約が同時にアリティとなり, 有効であることがわかる。ここで, $\alpha^L = 1.83$ の値は式(6)の崩壊荷重解析により決定され, 一方, $\alpha^U = 2.08$ の値は式(4a)と(4b)を用いて求められる。

(2) 図-2で得た有効範囲の妥当性を立証するため, 式(1)で α を逐次変動させる数値実験により終局荷重係数 α と双対変数 β_s (式(1b)に対応する変数), β_u (式(1d)に対応する変数)との関係を図-3のように求めた。すなわち, 図-3より $\beta_u = 0$ (アリティでない), $\beta_s > 0$ (アリティである)の領域(S設計)の α の最大値は図-2の $\alpha^L = 1.83$ と一致して

いる。一方, $\beta_u > 0, \beta_s = 0$ の領域(U設計)における α の最小値は図-2の $\alpha^U = 2.08$ と合致している。したがって図-3の数値実験より式(6)および式(4)による α^L, α^U の決定法が妥当であることが認められる。

(3) 図-4は終局荷重係数 α と許容変位 u_a の値による設計有効領域を示している。これよりD+U設計およびS+U設計の領域はかなり広いことがわかる。

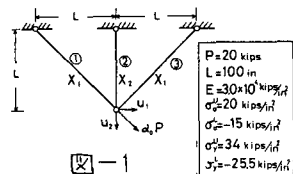


図-1

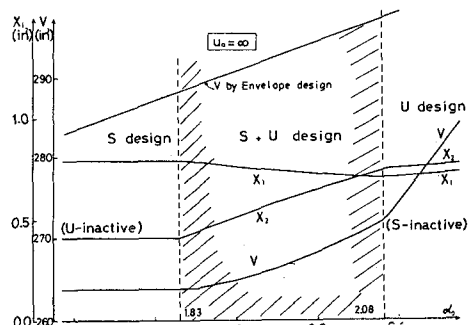


図-2

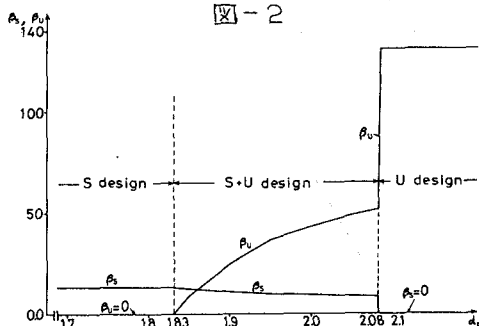


図-3

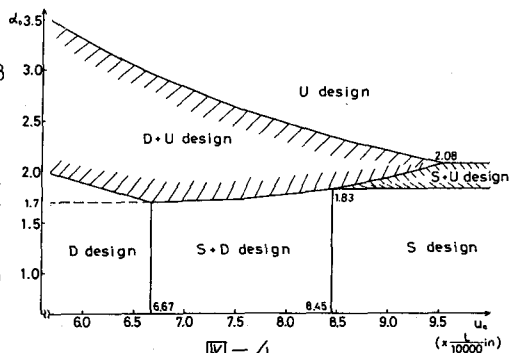


図-4

参考文献: 1) Grierson, D.E. and L.A. Schmit: Synthesis under Service and Ultimate Performance Constraints, Computers and Structures, Vol 15, No.14, pp.405-417, 1982. 2) 石川, 三郎, 香月: 使用時と終局時の制約を同時に考慮した最適設計に関する一考察, I-215, 第38回年報, 昭和58年9月. 3) Grierson, D.E.: Collapse Load Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn and Maier, Pergamon Press, pp.73-106, 1979.