

群馬大学 正員 平田恭久
東京大学 正員 伊藤文人

1. 等式制約探索法の概要

筆者らは以前から等式制約探索法と称する活性でかつ有利な制約面上で最適解を探索する方法について研究を進めてきたが、この方法と双対探索法との関連について考察を行い、両者の方法による探索プログラムを作成し比較を行った。

等式制約探索法では不等式制約付き最小化問題 (1) 式について変数、制約式を (2) 式のように選ぶが、このとき Lagrange 関数 $L(x, \lambda)$ (3) 式は $f(x)$ に等しく、 $L(x, \lambda)$ の x による微分は (4) 式になる。

(4) 式を分けて、制約変数 λ_m による微分について (5) 式が成立するように λ_m を定め、探索変数 x_e による微分について (6) 式が成立するような探索方向ベクトル Δx_e を求める。等式制約 $g_m(x) = 0$ 及び制約変数 λ_m を選んだときに満足すべき条件は $g_m(x) \leq 0$ 及び $\lambda_m \geq 0$ であるが、探索を進めていくにつれこの条件を満足する等式制約は変化するので制約式及び変数の入換えが必要である。

2. 主問題及び双対問題の解法

主問題とその双対問題は (7), (8) 式で表わされる。鞍点が存在するなら鞍点 $L(x^*, \lambda^*)$ は (9) 式を解くことにより得られ、主問題の解 = 双対問題の解である。

1) 主問題を解くには (9) 式の左辺について最初に $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ を行うが、 $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ となるような $g_i(x)$ と λ_i の組合せは (10) 式になる。 $L(x, \lambda)$ は λ に関し線形であるので $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ となる λ を定めることはできないが、(10) 式は $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ を満足する $g_i(x)$ と λ_i の条件を与える。この条件は (2) 式第 3 行、第 4 行と同じであり、等式制約探索法での制約式と λ の条件は主問題の解法 $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ に相当している。(10) 式第 2 行と第 3 行は $\lambda_i g_i(x) = 0$ を意味しているので $L(x, \lambda) = f(x)$ となり、これと (10) 式第 1 行の $g_i(x) \leq 0$ を合わせると $\max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ は $g_i(x) \leq 0$ 付きの $f(x)$ でありこれの最小化は (7) 式の主問題である。

2) 双対問題を解くには (9) 式の右辺について最初に $\min_x L(x, \lambda)$ を行うが、これは (12) 式的双対関数 $R(\lambda)$ である。 $L(x, \lambda)$ が x で微分可能であれば $\min_x L(x, \lambda)$ となる x は $\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ より求まる。次に $\max_{\lambda \geq 0} R(\lambda)$ を行うがこれは (8) 式的双対問題である。

3. 等式制約探索法と双対探索法との対応

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \quad & x: n \text{ 個の変数} \\ \text{subj. to } g_m(x) \leq 0 \quad & g_m: M \text{ 個の制約式} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{制約変数 } \lambda_m: m \text{ 個} \\ \text{探索変数 } x_e: n-m \text{ 個} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 \text{ では } \lambda_m \geq 0: m \text{ 個} \\ g_{m-m}(x) \leq 0 \text{ では } \lambda_{m-m} = 0: M-m \text{ 個} \end{aligned}$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_m^T g_m(x) = f(x) \quad (3)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda_m^T \frac{\partial g_m(x)}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} + \lambda_m^T \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_m} = 0 \quad (5)$$

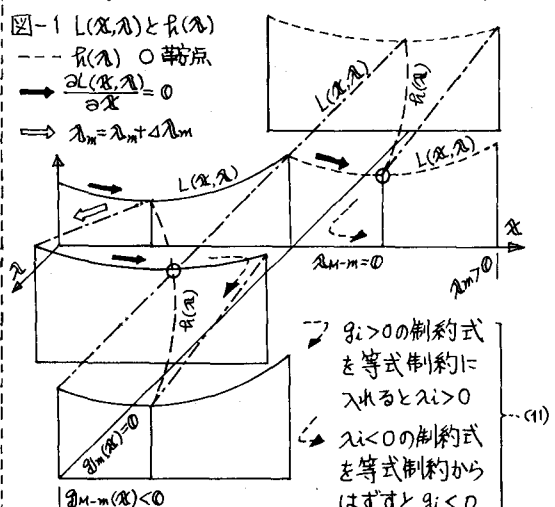
$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_e} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_e} + \lambda_m^T \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_e} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{主問題} \quad \min_x f(x) \quad & \text{--- (7)} \\ \text{subj. to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{双対問題} \quad \max_{\lambda} h(\lambda) \quad & \text{--- (8)} \\ \text{subj. to } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) \quad (9)$$

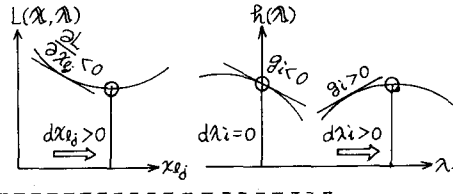
主問題 双対問題

$$\begin{aligned} g_i(x) > 0 \text{ なら } L(x, \lambda) \text{ の } \max \text{ が定まらない} \\ \text{いので } g_i(x) \leq 0 \text{ とする} \\ g_i(x) < 0 \text{ なら } \lambda_i = 0 \text{ のときが } \max \\ g_i(x) = 0 \text{ なら } \lambda_i \geq 0 \text{ であればよい} \end{aligned} \quad (10)$$



等式制約探索法は主問題について 図-2 $L(x, \lambda)$ と $h(\lambda)$ の探索方向

の探索法であり、 $L(x, \lambda)$ について x_{ei} で探索するが、双対探索法では $h(\lambda)$ について λ_{mi} で探索する。 $L(x, \lambda)$ と $h(\lambda)$ の探索方向を図示したのが図-2である。探索方向 $dx_{ei}, d\lambda_{mi}$ を (13),



$$h(\lambda) = \min_x L(x, \lambda) \quad \text{---- (12)}$$

$$dx_{ei} = - \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_{ei}} \quad \text{---- (13)}$$

$$d\lambda_i = \frac{\partial h(\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \quad \text{---- (14)}$$

ただし $\lambda_i = 0$ かつ $g_i < 0$ なら $d\lambda_i = 0$

(14) 式に示すが、このままでは探索に不向きなので探索方向ベクトル $\Delta x_e, \Delta \lambda_m$ を (15), (16) 式より求める。制約式は全部で M 個であるが、双対探索法では探索する λ は限られている場合が多い。 $\lambda_i = 0$ かつ $g_i \leq 0$ の制約式の λ を $\lambda_{M-m} = 0$ とし、 λ_{M-m} の探索変数 x_e で探索し $\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_e} = 0$ となるように x_e ($n-m$ 個) を定めるが、このとき $g_m(x) = 0$ となるように制約変数 λ_m (m 個) を定め (他の $M-m$ 個の $g_{M-m}(x) \leq 0$)、 $\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_m} = 0$ となるように $\lambda_m \geq 0$ (m 個) を定める (他の $M-m$ 個の $\lambda_{M-m} = 0$)

等式制約探索法での g_m に相当しており、鞍点では両者は一致する。

等式制約探索法と双対探索法を対比させたのが (17), (18) である。両者共 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x} = 0$ (n 個) 及び $g_m(x) = 0$ (m 個) の式より x (n 個) 及び λ_m (m 個) の変数を定めているが、式と変数は同じでも式と変数の対応が異なり、解く順序が逆になる。両者の関係を図-1に示す。等式制約探索法では g_i と λ_i は $g_m(x) = 0$ 上と $\lambda_{M-m} = 0$ 上のみ存在し、 $g_m(x) = 0$ 上では $\lambda_m \geq 0$ が、 $\lambda_{M-m} = 0$ 上では $g_{M-m}(x) \leq 0$ が許容領域である。 g_i または λ_i が許容領域にないときは (11) に示す入換えにより許容領域に移行し $L(x, \lambda)$ の探索により鞍点に到達する。これに対し双対探索法では $\lambda_m \geq 0$ が許容領域であり、 $h(\lambda)$ の探索により鞍点に到達する。

4. 探索プログラム及びまとめ

上記3.での両者の対応を考慮すると、図-3に示すように等式制約探索法によるプログラムの内容を若干修正するだけで双対探索法のプログラムとなり、主問題と双対問題を同一の仕組みのプログラムで扱うことができる。等式制約探索法での $g_m(x) \leq 0$ 及び $\lambda_m \geq 0$ の判定処理を双対探索法では探索により処理しているのでプログラムは簡素化される。なお $\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ を解くでの $\frac{\partial g_m}{\partial x}$ は差分を用いず代入計算による微分式を用いた。フランジ厚を無視したプレートガーダーについて図-4に示す簡単な制約式を採用し、等式制約探索法、双対探索法、算出式で最適解を求めたが、三者の解は一致した。等式制約探索法に比べ双対探索法は ①アルゴリズムが単純 ②計算量が多い ③計算途中の解が許容解でないといえる。

図-3 概要フローチャート 等式制約探索法 双対探索法

